N° D'ORDRE :
1187.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. ERNEST ESCLANGON,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agrégé des Sciences mathématiques,
Aide-Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

1re THÈSE. — LES FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 25 Juin 1904, devant la Commission d'examen.

MM. PAUL APPELL, *Président.*
POINCARÉ,
PAINLEVÉ, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550422_0002

N° D'ORDRE :
1187.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. Ernest ESCLANGON,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agrégé des Sciences mathématiques,
Aide-Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

1re THÈSE. — Les fonctions quasi-périodiques.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 25 Juin 1904, devant la Commission d'examen.

MM. Paul APPELL, *Président.*
POINCARÉ, PAINLEVÉ, *Examinateurs.*

ACAD LUGD BAT BIBL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	DARBOUX, professeur	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	TROOST, CH. WOLF.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Enseignem^t P. C. N.).
	P. JANET	Physique.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	N.	Zoologie, Anatomie. Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Analyse et Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HAUG	Géologie.
	HADAMARD	Calcul différentiel et calcul intégral.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

35017 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MES MAITRES

MESSIEURS ÉMILE BOREL ET PAUL PAINLEVÉ.

A

MONSIEUR G. RAYET.

Hommage de ma profonde reconnaissance

E. ESCLANGON.

PREMIÈRE THÈSE.

LES

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES.

INTRODUCTION.

Je me suis proposé dans ce travail l'étude d'une classe de fonctions d'une variable réelle, qui, par leurs propriétés, se rapprochent des fonctions périodiques et les comprennent comme cas particulier. La base de mes recherches est une extension de la notion de périodicité, mais une extension dirigée dans une voie toute particulière.

Lorsqu'on caractérise une classe de fonctions par une propriété définie, il arrive souvent que la même propriété est susceptible de plusieurs définitions équivalentes, mais logiquement distinctes. L'une de ces définitions adoptée, les autres en deviennent des conséquences nécessaires. Si le choix de la définition est indifférent lorsqu'il s'agit de faire l'étude des fonctions qui possèdent la propriété en question, il n'en est plus de même lorsqu'on se propose de faire des généralisations. Suivant que l'on porte son attention sur telle ou telle définition, ou même sur telle ou telle propriété qui résulte d'une définition, on peut obtenir des généralisations totalement distinctes.

En ce qui concerne la périodicité, la propriété pour une fonction $f(x)$

de vérifier la relation

$$f(x+a)=f(x)$$

peut être considérée comme un cas particulier de la propriété fonctionnelle plus générale

$$f[\theta(x)]=f(x),$$

où $\theta(x)$ désigne une fonction quelconque, mais donnée.

De même toute relation fonctionnelle de la forme

$$f(x+na)+A_1 f[x+(n-1)a]+\ldots+A_n f(x)=0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignent des constantes, ou même des fonctions données, définit vis-à-vis de la fonction $f(x)$ une propriété qui est encore une généralisation de la périodicité. Les unes et les autres de ces propriétés possèdent ce caractère d'être exprimables par des relations fonctionnelles explicites à termes finis; il n'en est plus de même de celles dont il va être question.

On peut, lorsqu'on définit la périodicité ordinaire, porter son attention sur une autre conséquence de la définition. Une fonction périodique $f(x)$ possède la propriété suivante : Étant donné un intervalle quelconque $(\alpha, \ldots, \beta)$ il existe une infinité d'intervalles $(\alpha+h, \ldots, \beta+h)$ égaux au premier, et aussi éloignés que l'on veut de l'origine, dans lesquels la fonction reprend la même série de valeurs. Mais on peut supposer qu'au lieu de repasser exactement par les mêmes valeurs, la fonction ne les reprend qu'avec une certaine approximation, et les fonctions que nous étudierons jouissent en effet de la propriété suivante : Étant donné un intervalle quelconque $(\alpha, \ldots, \beta)$ et un nombre ε aussi petit que l'on veut, on peut déterminer une infinité d'intervalles $(\alpha+h, \ldots, \beta+h)$, aussi éloignés que l'on veut du premier, dans chacun desquels la fonction considérée *reprend la même série de valeurs à moins de* ε *près :* d'où le nom de *quasi-périodicité* donné à cette propriété.

Si l'on se bornait là, la définition serait trop générale, et il ne serait guère possible d'en tirer des conséquences assez précises pour donner lieu à des recherches utiles.

Un exemple particulier va nous mettre sur une voie nouvelle, c'est celui des fonctions de fonctions périodiques. Ces dernières (en supposant les fonctions continues) possèdent bien la propriété en question, mais un autre

élément est également intervenu : l'ensemble des périodes figurant dans les fonctions périodiques qui composent la fonction donnée.

Soient $f(x) = F[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)]$ une telle fonction; a_1, $a_2, \ldots, a_n$ les périodes des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Lorsqu'on se pose le problème suivant : *Dans quels cas la fonction f peut-elle se mettre sous la forme d'une fonction d'un nombre moindre de fonctions périodiques?* on s'apercoit immédiatement qu'en dehors de la nature de la fonction $F(u_1, \ldots, u_n)$ intervient une propriété arithmétique des nombres a_1, $a_2, \ldots, a_n$ qui dans toute cette théorie jouera un rôle considérable. Si entre les nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients entiers (propriété que j'appellerai l'*indépendance des périodes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$), il est impossible, quelle que soit la fonction F, de réduire le nombre des fonctions périodiques.

Remarquons encore que l'on a, quels que soient les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$,

$$f(x) = F[u_1(x + m_1 a_1), u_2(x + m_2 a_2), \ldots, u_n(x + m_n a_n)].$$

On est ainsi naturellement conduit à rechercher la nature de l'ensemble des points de coordonnées

$$(1) \qquad x + m_1 a_1, \quad x + m_2 a_2, \quad \ldots, \quad x + m_n a_n,$$

x prenant toutes les valeurs réelles, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ toutes les valeurs entières, et à démontrer ce théorème que si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, on peut, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, déterminer x et les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, de façon que les quantités

$$(2) \qquad x + m_1 a_1 - x_1, \quad x + m_2 a_2 - x_2, \quad \ldots, \quad x + m_n a_n - x_n$$

soient aussi petites que l'on veut. Or ce théorème avait été établi par M. Bohl, professeur à l'École Polytechnique de Riga, dans un travail que j'ignorais à l'origine de mes recherches et dont il sera question dans un instant.

On voit que, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la différence

$$f(x) - F[u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)]$$

devient infiniment petite chaque fois que les quantités (2) deviennent elles-mêmes infiniment petites.

Abandonnant alors les fonctions de fonctions périodiques, c'est cette propriété que j'adoptais d'abord comme définition des fonctions quasi-périodiques, la fonction $F[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)]$ étant remplacée par une fonction périodique quelconque $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que j'appellerai la *fonction associée de* $f(x)$ relativement au système de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Une question d'une grande importance se posait ensuite : $f(x)$ étant définie comme quasi-périodique, relativement au système de périodes a_1, $a_2, \ldots, a_n$, il fallait se demander s'il n'y avait pas d'autres systèmes de périodes jouissant des mêmes propriétés vis-à-vis de $f(x)$. J'ai résolu complètement ce problème, en introduisant la notion de *corps de périodes*, et j'ai montré que pour chaque fonction $f(x)$ existait un nombre minimum de périodes au-dessous duquel on ne peut descendre pour caractériser sa quasi-périodicité.

Telle est la suite d'idées qui m'avait conduit à la définition des fonctions quasi-périodiques, et quelques résultats furent publiés dans une Note aux *Comptes rendus* (novembre 1902). A la suite de cette publication M. Bohl me fit connaître que dans sa thèse [1] il avait exposé, bien que sous une forme complètement différente, des considérations analogues.

L'idée qui avait conduit M. Bohl repose sur les développements en séries trigonométriques avec plusieurs arguments proportionnels et voici exactement quel est l'objet de sa très intéressante thèse.

Une fonction $f(t)$ est supposée développable, dans le domaine T, en série uniformément convergente

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu + \ldots,$$

dans laquelle le terme général u_ν est un polynome entier en

$$\cos 2\pi \frac{t}{\alpha_1}, \quad \cos 2\pi \frac{t}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \cos 2\pi \frac{t}{\alpha_n}, \quad \sin 2\pi \frac{t}{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \sin 2\pi \frac{t}{\alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des nombres donnés quelconques différents de zéro, et il cherche une condition nécessaire et suffisante d'un tel développement. Or il se trouve que les fonctions ainsi caractérisées, lorsque le domaine T est

---

(1) *Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten.* Dorpat, 1893.

infini, sont les fonctions que j'ai appelées *quasi-périodiques*, mais M. Bohl ne s'est pas préoccupé de rechercher les divers systèmes de périodes qui, vis-à-vis de la même fonction $f(t)$, peuvent jouer le rôle attribué à α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Dans un autre Mémoire [1], publié en russe, M. Bohl traite quelques problèmes où interviennent des fonctions quasi-périodiques.

J'ignorais entièrement les recherches de M. Bohl au moment où je publiais les premiers résultats de ce travail et je tiens à lui restituer ici la priorité qui lui est due.

Le travail qui suit est divisé en quatre Parties bien distinctes :

La première traite des fonctions périodiques de plusieurs variables réelles, en vue de déterminer ultérieurement (dans la troisième Partie) les systèmes de périodes attachés à une même fonction quasi-périodique;

La deuxième est une étude de l'indépendance et comprend les définitions d'un corps de périodes, d'un champ de périodes, etc.;

Dans la troisième, je donne plusieurs définitions des fonctions quasi-périodiques continues que je divise d'ailleurs en deux classes distinctes. J'étudie ensuite leurs propriétés et je démontre quelques théorèmes relatifs aux fonctions de fonctions périodiques.

Passant ensuite aux développements en série, j'examine successivement le développement de M. Bohl, les développements en série de Fourier et les développements en séries uniformément convergentes de fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables; ces derniers peuvent conduire à une classe de fonctions qui sont encore une extension des fonctions quasi-périodiques. Je termine en démontrant une propriété importante des fonctions quasi-périodiques, à savoir que la quantité

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f[x+(n-1)h]\}$$

---

[1] О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ общаго характера примѣнимыхъ въ механикѣ. — P. Bohl, *Sur certaines équations différentielles d'un caractère général que l'on rencontre en Mécanique*. Dorpat, 1900.

tend vers une limite lorsque l'entier n augmente indéfiniment; ce qui permet, par cette voie, de retrouver certains développements en série de ces fonctions.

La quatrième Partie est consacrée aux applications, et à une étude rapide de quelques problèmes où peuvent intervenir des fonctions quasi-périodiques; mais c'est là un point sur lequel j'aurai à revenir, et qui n'a été, pour ainsi dire, traité ici que superficiellement.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

Avant d'aborder le sujet qui fait le principal objet de ce travail, j'exposerai un certain nombre de propriétés relatives aux fonctions périodiques de plusieurs variables réelles. La plupart de ces propriétés sont sans doute connues, dans tous les cas elles s'obtiennent aisément; mais, comme elles se rattachent étroitement à certaines propriétés des fonctions quasi-périodiques, j'ai cru indispensable de les étudier tout d'abord : ce sera là l'objet de la première Partie. Je ferai remarquer toutefois que la plupart des problèmes qui y sont contenus ont été traités en vue surtout des applications ultérieures, et c'est aussi la raison qui a déterminé le mode d'exposition.

Comme il m'arrivera parfois de considérer non seulement des fonctions continues mais aussi des fonctions discontinues, je ne crois pas inutile de rappeler quelques définitions relatives à ces dernières.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction quelconque des variables réelles indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; le mot fonction étant appliqué ici dans le sens le plus large, et servant à désigner une correspondance univoque absolument quelconque entre les systèmes de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la valeur F de la fonction considérée, lorsque le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en employant un langage géométrique, est situé dans un certain domaine D.

Ceci posé, soit $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point de ce domaine; imaginons un domaine S compris dans D et entourant le point P, par exemple une sphère, c'est-à-dire l'ensemble des points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ vérifiant l'inégalité

$$(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2 \leqq \rho^2.$$

Désignons par M′ le *maximum* des valeurs de F pour tous les points de

ce domaine, m' leur *minimum*, et ω' la différence

$$\omega' = M - m$$

qui représente l'*oscillation* [1] de la fonction dans le domaine S. Lorsqu'on fait tendre S vers o, par exemple lorsque ρ tend vers o, les nombres M', m', ω' ont chacun une limite; appelons M, m, ω ces limites.

Les nombres M, m et ω sont respectivement : le *maximum*, le *minimum* et l'*oscillation* au point P.

Il est clair que l'on a en tout point

$$m \leqq F \leqq M.$$

Si $F = M$, la fonction est, selon l'expression de M. Baire, *semi-continue* supérieurement; si $F = m$, la fonction est au contraire *semi-continue* inférieurement; enfin, si $m = F = M$, la fonction est *continue*, au sens ordinaire du mot, par rapport à l'ensemble des variables.

Les *fonctions continues* sont donc celles pour lesquelles l'oscillation ω est nulle en tout point.

Envisageons l'oscillation ω qui est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie en tout point P du domaine D. En chaque point P, cette fonction a, à son tour, un minimum m_1. Si m_1 est nul en tout point P, la fonction F est dite *ponctuellement discontinue*.

Toute fonction qui ne possède pas cette propriété est dite au contraire *totalement discontinue*.

Ainsi la condition imposée à ω d'avoir son minimum nul en tout point permet de définir un ensemble de fonctions jouissant de propriétés particulières : les fonctions ponctuellement discontinues. Comme l'a montré M. Baire, ces fonctions s'introduisent d'une manière naturelle; elles jouissent en effet de la propriété suivante qui est capitale : il y a dans tout domaine des points où elles se rapprochent autant qu'on veut d'une fonction continue ou, pour préciser, *il existe effectivement dans tout domaine des points où ces fonctions sont continues*.

Dans un autre ordre d'idées, on sait qu'une fonction continue peut être définie par un ensemble dénombrable de conditions, par exemple

---

(1) Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, p. 4-16. Milan, 1899.

par les valeurs qu'elle prend sur un ensemble dénombrable de points, l'ensemble étant supposé *dense* (¹) dans tout domaine. De même les fonctions ponctuellement discontinues peuvent se définir au moyen d'un ensemble dénombrable de conditions. Le fait est certain pour les fonctions ponctuellement discontinues d'une variable, il est probable pour celles de plusieurs variables. Une fonction ponctuellement discontinue d'une variable $F(x)$ est en effet représentable par une série de fonctions continues

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots;$$

comme on peut se donner les diverses fonctions $f_n(x)$ par un ensemble dénombrable de conditions, on aura donc, pour définir complètement $F(x)$, un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables de conditions, c'est-à-dire en définitive un ensemble dénombrable.

On voit que les fonctions ponctuellement discontinues sont assurément celles qui, par leurs propriétés, se rapprochent le plus des fonctions continues, et l'on peut dire que, dans l'état actuel de l'Analyse, ce sont celles qui, après les fonctions continues, tiennent le premier rang par l'importance de leurs applications.

Il sera donc naturel, après avoir défini une classe particulière de fonctions continues, comme celles que nous appellerons les *fonctions quasi-périodiques*, de chercher à étendre leurs propriétés à des fonctions ponctuellement discontinues.

Au lieu d'envisager des fonctions définies *pour tous les points* d'un domaine, on peut considérer des fonctions définies seulement pour les points d'un ensemble donné; telle serait, par exemple, une fonction définie seulement pour les points dont les coordonnées sont rationnelles.

Pour une telle fonction et relativement à l'ensemble des points pour lesquels elle est définie, on peut définir également en chaque point de l'ensemble ce que l'on a appelé le *maximum*, le *minimum*, l'*oscillation* dans le cas des fonctions les plus générales.

(¹) Suivant l'usage, nous entendons par ensemble *dense* un ensemble de points, tel que tout domaine aussi petit qu'il soit contienne des points de l'ensemble. L'ensemble formé avec les points limites, ou *ensemble dérivé*, se compose alors de tous les points d'un domaine continu.

D'une façon générale nous appellerons *champ de variation* tout ensemble de points quel qu'il soit sur lequel une fonction est supposée définie.

Nous aurons justement à considérer, et d'une façon toute particulière, des fonctions définies sur un champ qui n'est pas continu, c'est-à-dire qui ne comprend pas tous les points d'un domaine continu, mais qui est *dense* dans tout domaine.

Parmi toutes les fonctions définies sur un même champ supposé dense, il y a lieu de distinguer celles qui sont *continues* sur le champ. La définition d'une telle continuité est évidente :

Soient P un point du champ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ses coordonnées. Nous dirons que la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est *continue au point* P si, étant donné ε positif quelconque, on peut trouver un domaine S entourant le point P, une sphère par exemple, tel que, pour tout point $P'(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ du champ compris dans S, on ait

$$|F(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n) - F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon.$$

Si la continuité a lieu pour tous les points du champ, la fonction est dite *continue sur le champ*.

Il est essentiel de remarquer que si l'ensemble n'est pas *parfait*, c'est-à-dire ne contient pas son dérivé, la continuité en chaque point du champ n'entraîne pas la *continuité uniforme* sur le champ bien que celui-ci puisse être contenu dans un domaine fini.

Par conséquent, parmi toutes les fonctions continues sur un champ donné, il faut encore distinguer celles qui sont *uniformément continues*. Au point de vue auquel nous nous placerons, ce seront là les plus importantes, celles dont l'étude offrira le plus d'intérêt et le plus de profit.

J'indiquerai immédiatement une propriété presque évidente, mais néanmoins importante, relative aux fonctions uniformément continues sur un champ dense.

Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ une suite de points du champ ayant pour limite un point Q, qui peut d'ailleurs ne pas appartenir au champ, et considérons la suite des valeurs correspondantes de la fonction F ; soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ces valeurs ; je dis que F_n a une limite lorsque P_n tend vers Q. En effet, la fonction F étant uniformément continue, à tout nombre ε positif arbitraire-

ment donné on peut faire correspondre un nombre positif ρ tel que, P, P désignant deux points *quelconques* du champ pour lesquels

$$|\overline{PP'}| < \rho,$$

on ait

$$|F(P') - F(P)| < \rho \quad (^1).$$

Par conséquent, on pourra trouver l'entier positif ν tel que, n et n' étant supérieurs à ν, on ait

$$|F(P_{n'}) - F(P_n)| < \varepsilon,$$

propriété qui caractérise la convergence de la suite $F(P_1), \ldots, F(P_n), \ldots$; de plus la limite que nous désignerons par $F(Q)$ est indépendante de la façon dont les points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ tendent vers Q. Nous pouvons donc trouver une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et une seule, définie dans un domaine continu (le champ dérivé du champ donné) et qui coïncide avec la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ en tous les points du champ donné. Le raisonnement montre de plus que la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue en tout point par rapport à l'ensemble des variables et par suite *uniformément continue* en supposant, ce qui a été implicitement admis, que le champ de variation est limité.

La nature de ce résultat semble, *a priori*, rendre un peu inutile la considération des fonctions uniformément continues sur un champ dense, mais nous verrons plus loin qu'elles s'introduisent, au contraire, d'une manière naturelle dans la définition des fonctions quasi-périodiques.

En effet, à *toute* fonction $f(x)$ définie pour toutes les valeurs réelles de la variable x, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, nous ferons correspondre une fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ définie sur un champ dense donné, et c'est précisément en imposant à $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ la condition d'être uniformément continue que nous obtiendrons un ensemble de fonctions $f(x)$ jouissant de propriétés particulières analogues à la périodicité.

---

(1) Pour plus de simplicité, je pose

$$|\overline{PP'}| = \sqrt{(\xi'_1 - \xi_1)^2 + (\xi'_2 - \xi_2)^2 + \ldots + (\xi'_n - \xi_n)^2} \quad \text{et} \quad F(P) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Ces préliminaires posés, j'aborde l'étude des fonctions simplement périodiques de une ou plusieurs variables réelles. J'aurais d'ailleurs pu me borner aux fonctions continues, puisque ce sont en réalité les seules que j'aurai à considérer dans les études ultérieures; mais, comme un certain nombre des résultats obtenus paraissent présenter quelque intérêt indépendamment du but poursuivi, j'ai donné à cette première Partie une plus grande généralité, en ce qui concerne du moins les fonctions définies pour toutes les valeurs des variables, pour lesquelles l'hypothèse de la continuité ne m'a pas paru nécessaire.

FONCTIONS PÉRIODIQUES D'UNE VARIABLE.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, définie pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Le nombre a est dit *période* si l'on a, quel que soit x,

$$f(x+a)=f(x).$$

Il est clair que si a est période, ma, où m désigne un entier quelconque positif ou négatif, est également période. L'ensemble formé avec les périodes comprend donc toujours, si la fonction est périodique, une infinité de termes qui, en valeur absolue, dépassent tout nombre donné. Quelle que soit d'ailleurs la nature de cet ensemble, ce dernier doit satisfaire aux conditions suivantes : si a, a' sont deux termes quelconques de l'ensemble, la somme, la différence, et plus généralement tout nombre de la forme $ma+m'a'$ (m, m' étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs) appartient aussi à l'ensemble.

Relativement à la nature de l'ensemble des périodes nous distinguerons deux cas, suivant que les modules des périodes ont ou n'ont pas o comme minimum absolu.

1° *Les modules des périodes sont supérieurs à un nombre fixe* A *différent de* o. Soit a une période; toute autre période b est nécessairement commensurable avec a, sinon on pourrait déterminer des entiers m et n de façon que la période $ma+nb$ soit aussi petite que l'on veut, par suite inférieure à A.

a étant une période, toutes les périodes sont donc de la forme $\frac{pa}{q}$, p et q

étant deux entiers que l'on peut supposer premiers entre eux; enfin si a et $\frac{pa}{q}$ sont périodes, $\frac{a}{q}$ est aussi période, car on peut choisir m et n de façon que $mq + np = 1$, et alors

$$ma + n\frac{pa}{q} = \frac{a}{q}.$$

Considérons toutes les périodes de la forme $\frac{a}{q}$, il y en a une qui est plus petite que toutes les autres, soit $\alpha = \frac{a}{q_1}$. Alors si b est une période quelconque, elle est nécessairement de la forme $b = p\alpha$, car si elle se mettait sous la forme $\frac{p\alpha}{q}$ (p, q premiers entre eux), $\frac{\alpha}{q} = \frac{a}{qq_1}$ serait aussi période, et $\frac{a}{q_1}$ est, par hypothèse, la plus petite période de la forme $\frac{a}{q}$.

Ainsi dans ce cas il existe une période α que nous appellerons la *période minimum,* telle que toutes les autres périodes soient de la forme $m\alpha$, m étant un entier quelconque positif ou négatif, et d'ailleurs tous les nombres de cette forme sont des périodes.

2° *Les modules des périodes ont* 0 *comme minimum absolu.* Cela veut dire que, étant donné ρ aussi petit que l'on veut, il existe des périodes comprises entre $-\rho$ et $+\rho$. Alors l'ensemble des périodes est un ensemble dense dans tout intervalle; en d'autres termes, étant donné A, il y a des périodes aussi voisines que l'on veut de A.

Ceci posé, soit x_0 une valeur quelconque de la variable, et considérons l'ensemble des valeurs $x_0 + a$, où a désigne une période quelconque. Cet ensemble est également dense dans tout intervalle, et la fonction $f(x)$ a la même valeur pour tous les points de l'ensemble. Supposons que la fonction $f(x)$ ne soit *pas une constante;* il existe alors au moins une valeur x_1 pour laquelle $f(x_0) \neq f(x_1)$; l'ensemble $x_1 + a$ est également dense dans tout intervalle, et l'on a

$$f(x_1 + a) = f(x_1).$$

Par conséquent dans tout intervalle aussi petit qu'il soit, on pourra trouver des points pour lesquels $f(x)$ a la valeur $f(x_0)$ et des points pour lesquels

$f(x)$ a la valeur $f(x_1)$. La fonction $f(x)$ *ne serait continue en aucun point*, elle serait *totalement discontinue* [1].

Nous partagerons donc en *deux classes* l'ensemble des fonctions périodiques : la première qui comprend les fonctions périodiques admettant une période minimum, la seconde les fonctions périodiques admettant des périodes infiniment petites.

A la première classe appartiennent certainement toutes les fonctions périodiques continues ou ponctuellement discontinues, mais certaines fonctions totalement discontinues peuvent également appartenir à cette classe.

Quant à la seconde classe, elle se compose nécessairement, à part les constantes, de fonctions qui sont totalement discontinues.

Nous exclurons de notre étude les fonctions de la seconde classe, à l'exception toutefois des constantes pour lesquelles tout nombre peut être considéré comme une période.

Remarques. — 1° Si une fonction périodique $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x, cette dérivée est évidemment périodique et les deux fonctions $f(x)$, $f'(x)$ ont toutes leurs périodes communes. Il est évident que toute période de $f(x)$ appartient à $f'(x)$. Inversement $f(x)$ étant périodique, toute période de $f'(x)$ appartient à $f(x)$.

En effet, soient a la période minimum de $f(x)$, et b une période quelconque de $f'(x)$. On conclut de là

$$f(x+b) = f(x) + A$$

et, par suite,

$$f(x+ma+nb) = f(x) + nA.$$

Si b était incommensurable avec a, $ma+nb$ pourrait être choisi aussi petit que l'on veut, d'où l'on conclurait $A = 0$, et, par suite, $f(x+b) = f(x)$,

---

(1) Il existe des fonctions totalement discontinues admettant des périodes infiniment petites. Tel serait le cas d'une fonction égale à 0 pour les valeurs rationnelles de x, à 1 pour les autres valeurs; l'ensemble des périodes se composerait alors de l'ensemble des nombres rationnels.

ce qui est impossible. On a donc

$$b = \frac{pa}{q}$$

et, d'après le même raisonnement,

$$f\left(x + ma + \frac{npa}{q}\right) = f(x) + n\mathrm{A},$$

ou, en choisissant m et n de façon que $m + \frac{np}{q} = 1$,

$$f(x + a) = f(x) + n\mathrm{A};$$

d'où

$$\mathrm{A} = 0,$$

et, par suite,

$$f\left(x + \frac{pa}{q}\right) = f(x);$$

ce qui entraîne

$$q = 1,$$

la période b appartient donc à $f(x)$.

2° Soit $f(x)$ une fonction périodique; si l'on effectue sur x une substitution linéaire, la fonction reste périodique et la nature de l'ensemble des périodes n'est pas modifiée; d'ailleurs les substitutions linéaires sont les seules transformations définissant une correspondance univoque de $-\infty$ à $+\infty$ entre les variables, et conservant la périodicité vis-à-vis de toutes les fonctions périodiques.

FONCTIONS PÉRIODIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie pour toutes les valeurs de ces variables.

Nous dirons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les éléments d'une période ω si l'on a pour toutes les valeurs attribuées aux variables la relation

$$\mathrm{F}(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n) = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Au point de vue géométrique $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont dans l'espace à n dimen-

sions les projections d'un vecteur; nous appellerons *module de la période* ω la quantité $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}$.

Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ désignent des périodes quelconques, leur somme géométrique et, plus généralement, toute somme géométrique de la forme

$$m_1(\omega_1) + m_2(\omega_2) + \ldots + m_p(\omega_p),$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont des entiers quelconques positifs ou négatifs, est également une période.

Je me propose de rechercher la nature de l'ensemble des périodes ω appartenant à une même fonction.

J'étudierai tout d'abord les fonctions $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui possèdent la propriété suivante :

Sur toute droite Δ

$$x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, \qquad x_2 = x_2^0 + \alpha_2 t, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0 + \alpha_n t,$$

on peut trouver des points (au moins un) où $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est continue par rapport à l'ensemble des variables.*

Il en résulte, en particulier :

1° Que toutes les fonctions de t obtenues en posant

$$\Phi(t) = F(x_1^0 + \alpha_1 t, x_2^0 + \alpha_2 t, \ldots, x_n^0 + \alpha_n t)$$

sont continues pour certaines valeurs de t;

2° Que ces fonctions $\Phi(t)$, si elles sont périodiques, n'admettent pas de périodes infiniment petites à moins d'être constantes.

Il est à peine utile de remarquer que les fonctions continues [1] jouissent toujours de ces propriétés.

Dans le cas des fonctions périodiques d'une variable, nous avons fait observer que les substitutions linéaires ne modifiaient en rien la nature de l'ensemble des périodes; il n'en est plus de même pour certaines fonctions de plusieurs variables.

---

[1] Lorsque j'emploie l'expression *fonction continue*, j'entends par là la continuité par rapport à l'ensemble des variables; je spécifierai quand il y aura lieu de distinguer la continuité par rapport à certaines variables.

Avant de traiter le cas général, nous examinerons une classe de fonctions pour lesquelles la nature de l'ensemble des périodes n'est pas modifiée par les substitutions linéaires.

Fonctions irréductibles. — Nous dirons que *la fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est* IRRÉDUCTIBLE *s'il est impossible, par une substitution linéaire effectuée sur* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de la ramener à une fonction d'un nombre moindre de variables.*

Au contraire, la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera RÉDUCTIBLE si, par une substitution linéaire convenable, on peut la transformer en une fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, (avec $p < n$), où $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont des fonctions linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Remarquons immédiatement qu'il n'y a pas à distinguer les cas où les formes linéaires sont ou ne sont pas homogènes, car on peut poser

$$\Phi(y_1 + k_1, y_2 + k_2, \ldots, y_p + k_p) = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

et, pour cette raison, nous supposerons toujours que les formes linéaires de réduction sont homogènes.

Si, dans la fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, les formes linéaires $y_1, y_2, \ldots, y_p$ n'étaient pas indépendantes, on pourrait abaisser encore le nombre des variables indépendantes.

Si une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est réductible, il est clair qu'on peut toujours la ramener à une fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ par une substitution linéaire convenable à déterminant non nul; de plus, si, par une autre substitution linéaire, on transforme également F en une fonction irréductible $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_q)$, il est évident d'abord que $q = p$ et ensuite qu'on peut passer de $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ à $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ par une substitution linéaire à déterminant non nul.

Nous ne nous préoccuperons pas de rechercher les caractères qui, dans le cas le plus général, permettent de reconnaître si une fonction est réductible ou non. Nous ferons simplement remarquer que si la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut se ramener à une fonction irréductible de p variables $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ et, si elle admet des dérivées partielles continues $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$, il existe entre ces dernières $n - p$ relations linéaires

homogènes et distinctes, à coefficients constants; la condition est nécessaire et suffisante. Dans le cas général on peut dire, en employant un langage géométrique, qu'il existe $n-p$ directions distinctes telles que, sur toute droite parallèle à l'une quelconque d'entre elles, la fonction reste constante. J'entends par $n-p$ directions *distinctes* des directions telles que, dans le Tableau formé avec leurs projections sur les axes

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \alpha_1^{n-p} & \alpha_2^{n-p} & \dots & \alpha_n^{n-p} \end{matrix} \right\|,$$

les déterminants d'ordre $n-p$ ne soient pas tous nuls. On peut, du reste, avec ces $n-p$ directions, en obtenir une infinité d'autres sur lesquelles la fonction est également constante, mais elles ne sont pas *distinctes* des précédentes.

Nous remarquerons enfin que les substitutions linéaires ne modifient pas la nature des discontinuités d'une fonction. En particulier, si une fonction possède les propriétés définies page 16, il est clair que les fonctions irréductibles qu'on en déduit possèdent ces mêmes propriétés. Il y a plus : si une fonction possède les caractères de la page 16, et si elle est *réductible*, elle est *continue* pour toutes les valeurs des variables, ainsi que les fonctions irréductibles qu'on en déduit par substitution linéaire. Je ne m'attarderai pas à la démonstration qui est facile; on en conclut que, si une fonction possédant les propriétés en question est discontinue pour certains points, elle est certainement irréductible.

Nous allons envisager maintenant les fonctions irréductibles au point de vue des périodes qu'elles peuvent présenter, et démontrer le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Les fonctions irréductibles continues et, plus généralement, celles qui satisfont aux conditions de la page* 16, *ne peuvent admettre de périodes infiniment petites* (*c'est-à-dire de module aussi petit que l'on veut*).

Tout d'abord voyons, au point de vue géométrique, quelle est la consé-

quence de l'irréductibilité. Soit $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une direction quelconque mais fixe, et considérons toutes les fonctions d'une variable obtenues en prenant les valeurs de la fonction sur les droites parallèles à Δ; en d'autres termes, considérons les fonctions obtenues en posant

$$\Phi(t) = F(x_1 + \alpha_1 t, x_2 + \alpha_2 t, \ldots, x_n + \alpha_n t).$$

Si F est irréductible, la fonction $\Phi(t)$ ne peut être constante quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. S'il en était autrement, il suffirait de changer les axes, et de prendre comme nouvel axe Oy_1, une droite parallèle à Δ; la nouvelle fonction $\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ serait constante par rapport à y_1, quels que soient $y_2, y_3, \ldots, y_n$, c'est-à-dire qu'elle ne contiendrait pas y_1; la fonction F serait réductible, ce qui est contre l'hypothèse.

Ceci posé, supposons que la fonction F admette des périodes de module aussi petit que l'on veut. Pour simplifier l'exposition, nous raisonnerons sur le cas de trois variables.

Imaginons une sphère de rayon *un* ayant l'origine O comme centre et, à toute période $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, faisons correspondre sur la sphère le point de coordonnées

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \quad \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \quad \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

qui définit ainsi la direction de la période considérée.

Donnons-nous maintenant une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, tendant vers o; ε_k désignant l'un quelconque de ces nombres, il existe au moins une période ω_k dont le module est inférieur à ε_k, de sorte que nous obtenons ainsi une suite de périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots$ dont les modules sont respectivement inférieurs à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ leurs points représentatifs sur la sphère. L'ensemble des points P a sur la sphère au moins un point limite P_0, de coordonnées $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$. Ce point P_0 jouira de la propriété suivante : si, sur la sphère, on imagine une petite surface quelconque, un cercle de centre P_0 par exemple, on pourra trouver à son intérieur des points représentatifs de périodes dont les modules sont inférieurs à tout nombre donné ε.

Soient maintenant, Q un point quelconque de l'espace, Q′ un autre point quelconque situé sur la droite passant par Q et parallèle à OP_0; et

désignons par $F(Q)$ la valeur de la fonction au point Q. Je vais montrer qu'il existe dans tout domaine S entourant le point Q' (une sphère de centre Q' par exemple) des points Q'_1 pour lesquels on a

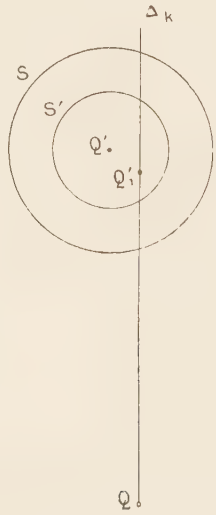
$$F(Q'_1) = F(Q).$$

Pour cela, à partir de l'origine commune Q, portons les segments

$$\begin{array}{lllllll}
\omega_1, & 2(\omega_1), & 3(\omega_1), & \ldots, & p(\omega_1), & \ldots, & \Delta_1, \\
\omega_2, & 2(\omega_2), & 3(\omega_2), & \ldots, & p(\omega_2), & \ldots, & \Delta_2, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\omega_k, & 2(\omega_k), & 3(\omega_k), & \ldots, & p(\omega_k), & \ldots, & \Delta_k, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}$$

Je désigne par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ les droites qui portent les segments des lignes $1, 2, \ldots, k, \ldots$. Les extrémités de tous ces segments forment un ensemble bien déterminé de points; soit E cet ensemble. Je dis que tout point de la droite QQ', Q' par exemple, est un *point limite* de l'ensemble E.

Fig. 1.



Considérons en effet une petite sphère quelconque S (*fig.* 1) de centre Q',

de rayon ρ et une sphère S′ de rayon $\frac{\rho}{2}$ concentrique à la première. Puisque les droites Δ_k ont la droite QQ′ comme droite limite, on pourra en trouver une infinité qui rencontrent la sphère S′; parmi les périodes correspondantes ω_k, il y en aura donc certainement dont le module [1] est inférieur à $\frac{\rho}{2}$; si Δ_k est l'une d'elles, il en résulte que la sphère S contient au moins une des extrémités Q'_1 des vecteurs ω_k, $2(\omega_k)$, ..., $p(\omega_k)$. La sphère S ayant un rayon quelconque aussi petit que l'on veut, il en résulte bien que Q′ est un point limite de l'ensemble E.

Or, en tout point de l'ensemble E, la fonction a manifestement pour valeur F(Q). Par conséquent, si la fonction était continue en Q′, sa valeur ne pourrait être que F(Q). La démonstration s'achève alors immédiatement. La fonction F étant irréductible, elle ne peut être constante sur toutes les droites parallèles à QQ′. Soit donc QQ′ une droite sur laquelle elle n'est pas constante. La fonction F satisfaisant aux conditions de la page 16, il existe sur QQ′ un point Q′ où elle est continue. Or nous venons de voir que si Q est un autre point quelconque de cette droite, on a nécessairement

$$F(Q) = F(Q');$$

la fonction serait constante sur la droite QQ′. Nous arrivons à une contradiction; on ne peut donc supposer qu'il existe des périodes infiniment petites.

Le cas d'un nombre quelconque de variables se traiterait de façon identique, et c'est seulement pour éviter des notations trop compliquées que je me suis borné aux fonctions de trois variables.

Ainsi les fonctions irréductibles qui satisfont aux conditions définies page 16 n'admettent que des périodes finies, mais il est évident que toutes les fonctions irréductibles dont les périodes sont finies ne satisfont pas à ces conditions. On peut affirmer toutefois que, si une fonction irréductible possède des périodes infiniment petites, elle est totalement discontinue sur certaines droites.

---

[1] Les axes sont supposés rectangulaires, mais on conçoit bien que cela n'a ici aucune importance.

Ici, comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous diviserons en deux classes l'ensemble des fonctions irréductibles périodiques.

La première classe comprendra celles dont les périodes sont finies; la seconde celles qui admettent des périodes infiniment petites; *nous exclurons complètement de notre étude les fonctions de la deuxième classe* qui, par la nature si singulière de leurs discontinuités, paraissent peu susceptibles d'applications utiles.

Soient $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une fonction irréductible [1], $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les éléments d'une période fixe ω. La fonction de t

$$\Phi(t) = F(x_1 + \alpha_1 t, x_2 + \alpha_2 t, \ldots, x_p + \alpha_p t)$$

admet, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$, la période 1. Cherchons la plus petite période commune à toutes les fonctions $\Phi(t)$ obtenues en faisant varier $x_1, x_2, \ldots, x_p$; elle est nécessairement de la forme $\frac{1}{q}$, de sorte qu'il suffira de former la suite

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{q+1}, \quad \ldots$$

et de s'arrêter dès que l'on aura trouvé une période $\frac{1}{q+1}$ qui ne soit pas commune; on est assuré de trouver une telle période, sans quoi F serait réductible. La période $\frac{\omega}{q}$ de coordonnées $\frac{\alpha_1}{q}, \frac{\alpha_2}{q}, \ldots, \frac{\alpha_p}{q}$ est la *période minimum* correspondant à ω.

Transformation des périodes par substitution linéaire. Fonctions réductibles. — Les substitutions linéaires jouent dans cette théorie un rôle important qui s'explique aisément si l'on réfléchit qu'elles transforment la périodicité en elle-même, et qu'elles sont les seules substitutions jouissant de cette propriété.

Soient $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction périodique quelconque, irréductible ou non, $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une période. Faisons, sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la

---

[1] A moins d'indication contraire, il ne s'agira plus désormais que de fonctions irréductibles à périodes finies.

substitution linéaire à déterminant différent de zéro

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = \lambda_1^1 x_1 + \lambda_2^1 x_2 + \ldots + \lambda_n^1 x_n, \\ y_2 = \lambda_1^2 x_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n^2 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \lambda_1^n x_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n^n x_n, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ldots & \lambda_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^n & \ldots & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

La fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se transforme en une fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et la période ω devient la période $\omega'(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de la fonction Φ, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ se déduisant de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par la substitution (1).

Si le module de la période ω est différent de 0, le module de la période ω' est aussi différent de 0, et inversement, puisque le déterminant Δ n'est pas nul. Nous n'avons jusqu'ici rien supposé sur la réductibilité de la fonction F. Si celle-ci est irréductible, elle reste irréductible et *toutes* les nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ figurent explicitement dans la fonction Φ.

Supposons la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ réductible, la substitution (1) étant choisie de façon qu'elle transforme F en une fonction irréductible de p variables $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Toute période $\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ à module $\neq 0$ se transforme bien en une période $\omega'(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_n)$ pour laquelle

$$\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2} \neq 0;$$

mais l'on pourrait avoir

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0,$$

de sorte que la période ω' n'aurait plus de signification vis-à-vis de la fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$.

Nous dirons dans ce cas que la période ω est une *période impropre* de la fonction F. Les périodes impropres s'évanouissent donc par la réduction. Leurs éléments vérifient les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda_1^1 \alpha_1 + \lambda_2^1 \alpha_2 + \ldots + \lambda_n^1 \alpha_n = 0, \\ \lambda_1^2 \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n^2 \alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1^n \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n^n \alpha_n = 0; \end{cases}$$

inversement, tout système de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vérifiant ces équations représente une période impropre de la fonction F. L'ensemble des périodes impropres a donc la puissance du continu, et il y a des périodes impropres dont le module est aussi petit que l'on veut [1].

On verrait bien aisément que la définition des *périodes impropres* ne dépend pas de la substitution employée pour ramener F à une fonction irréductible.

La somme, la différence géométrique de deux périodes impropres est évidemment une période impropre.

Nous appellerons, au contraire, *période propre* toute période de F dont les éléments ne vérifient pas les relations (2), et la définition ne dépend pas non plus de la substitution qui ramène F à être irréductible.

La somme géométrique d'une période propre et d'une période impropre est une période propre.

Toute période propre subsiste effectivement par toute substitution linéaire; si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont ses éléments dans la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ses nouveaux éléments dans la fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ sont donnés par les formules

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \lambda_1^1 \alpha_1 + \lambda_2^1 \alpha_2 + \ldots + \lambda_n^1 \alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_p = \lambda_1^p \alpha_1 + \lambda_2^p \alpha_2 + \ldots + \lambda_n^p \alpha_n. \end{array} \right.$$

Mais *il y a une infinité de périodes propres qui, par la substitution* (1), *se transforment en la même période* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ *de la fonction* Φ.

En effet, si à une période propre on ajoute, ou on soustrait, géométriquement un nombre quelconque de périodes impropres, la *période correspondante dans la fonction* Φ *reste invariable*. Cela résulte immédiatement du fait que les éléments d'une période impropre vérifient les équations (2). Inversement si deux périodes propres correspondent par la substitution (1) à une même période de la fonction Φ, elles diffèrent géométriquement d'une période impropre.

---

[1] Les fonctions réductibles possèdent donc des périodes infiniment petites. Chaque fois que l'on pourra établir qu'une fonction ne possède pas de périodes infiniment petites, on sera assuré qu'elle est irréductible.

Les périodes propres qui correspondent ainsi à une même période de la fonction Φ seront appelées des *périodes équivalentes*. Ici encore il faut remarquer que la définition de l'équivalence est indépendante de la substitution employée pour transformer F en une fonction irréductible.

Nous avons ainsi divisé en deux classes bien distinctes les périodes d'une fonction réductible : 1° les *périodes impropres qui disparaissent par réduction;* 2° *les périodes propres qui se séparent en groupes de périodes équivalentes, chaque groupe correspondant à une période de la fonction irréductible* Φ.

L'addition d'une période impropre à une période donnée ne change pas la nature de cette dernière, et enfin la nature d'une période quelconque reste invariable par *toute* substitution linéaire à déterminant différent de o.

Périodes propres distinctes. — Soient p périodes propres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ d'une fonction quelconque $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ supposée réductible à q variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$; cela veut dire que $y_1, y_2, \ldots, y_q$ étant q formes linéaires indépendantes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ convenablement choisies, on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q),$$

Φ étant une fonction irréductible des nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$. Désignons respectivement par $(\beta_1^1, \ldots, \beta_q^1), (\beta_1^2, \ldots, \beta_q^2), \ldots, (\beta_1^p, \ldots, \beta_q^p)$ les nouveaux éléments des périodes ω dans Φ. Nous dirons que *les p périodes considérées sont distinctes, si dans le Tableau des éléments*

$$\left\| \begin{matrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_q^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^p & \beta_2^p & \ldots & \beta_q^p \end{matrix} \right\|$$

il y a au moins un déterminant d'ordre p différent de o.

Bien que le mot de *distinctes* convienne assez mal pour qualifier une telle propriété, je l'emploierai cependant au lieu du mot *indépendantes,* qui semblerait mieux choisi, mais que je veux réserver pour exprimer une autre propriété qui sera étudiée dans la deuxième Partie.

Il résulte de là que la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne peut admettre plus de q périodes propres distinctes, q étant lui-même inférieur, au plus égal, à n.

Si l'on désigne par $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p)$ les éléments de p périodes propres distinctes ω dans la fonction F, il est évident que dans le Tableau

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^p & \alpha_2^p & \ldots & \alpha_n^p \end{matrix} \right\|$$

il y a au moins un déterminant d'ordre p différent de o. Cette condition est nécessaire, mais elle n'est suffisante que si la fonction est irréductible.

Des périodes distinctes restent distinctes par toute substitution linéaire à déterminant différent de o.

Si des périodes sont distinctes, celles que l'on obtient en leur ajoutant respectivement des périodes impropres quelconques sont aussi distinctes.

Soient p périodes propres distinctes $\omega_1(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, \omega_p(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$ et plus généralement p périodes quelconques telles que dans le Tableau formé avec leurs np éléments il y ait au moins un déterminant d'ordre p différent de o.

Effectuons la substitution linéaire

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1^1 \frac{y_1}{a_1} + \alpha_1^2 \frac{y_2}{a_2} + \ldots + \alpha_1^p \frac{y_p}{a_p} + \lambda_1^{p+1} y_{p+1} + \ldots + \lambda_1^n y_n, \\
x_2 &= \alpha_2^1 \frac{y_1}{a_1} + \alpha_2^2 \frac{y_2}{a_2} + \ldots + \alpha_2^p \frac{y_p}{a_p} + \lambda_2^{p+1} y_{p+1} + \ldots + \lambda_2^n y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_n &= \alpha_n^1 \frac{y_1}{a_1} + \alpha_n^2 \frac{y_2}{a_2} + \ldots + \alpha_n^p \frac{y_p}{a_p} + \lambda_n^{p+1} y_{p+1} + \ldots + \lambda_n^n y_n,
\end{aligned}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des nombres quelconques différents de o, les coefficients λ_i^j restant arbitraires, à la seule condition que le déterminant

$$\left| \begin{matrix} \frac{\alpha_1^1}{a_1} & \frac{\alpha_1^2}{a_2} & \ldots & \frac{\alpha_1^p}{a_p} & \lambda_1^{p+1} & \ldots & \lambda_1^n \\ \frac{\alpha_2^1}{a_1} & \frac{\alpha_2^2}{a_2} & \ldots & \frac{\alpha_2^p}{a_p} & \lambda_2^{p+1} & \ldots & \lambda_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\alpha_n^1}{a_1} & \frac{\alpha_n^2}{a_2} & \ldots & \frac{\alpha_n^p}{a_p} & \lambda_n^{p+1} & \ldots & \lambda_n^n \end{matrix} \right|$$

ne soit pas nul, ce qui est possible avec hypothèse faite. La substitution précédente transforme la période $\omega_1(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_n^1)$ en la période $\omega_1'(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$; de même la période $\omega_2(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^2)$ en la période $\omega_2'(0, a_2, 0, \ldots, 0)$ et ainsi de suite. En d'autres termes les vecteurs périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ se transforment en vecteurs périodes ω_1', $\omega_2', \ldots, \omega_p'$ dirigés suivant des nouveaux axes de coordonnées; la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ devient une nouvelle fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ périodique séparément par rapport à chacune des nouvelles variables y_1, $y_2, \ldots, y_p$, les nombres périodes correspondants $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pouvant être d'ailleurs arbitrairement choisis.

Constitution de l'ensemble des périodes d'une fonction irréductible. — Une fonction irréductible n'a que des périodes propres. Nous pouvons faire sur elle telle substitution linéaire que l'on voudra sans altérer la nature de l'ensemble de ses périodes.

Soit donc $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction irréductible. Elle admet au plus n périodes distinctes au sens que nous avons attaché à ce mot (p. 25). D'une façon générale, supposons qu'il y en ait au plus p, $(p \leqq n)$.

Comme nous venons de le voir, une substitution linéaire convenable transformera la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en une fonction

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)$$

périodique séparément par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$; soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les périodes correspondantes. La fonction Φ est irréductible, et la fonction F n'ayant pas plus de p périodes distinctes, il en est de même de la fonction Φ; soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les éléments d'une période quelconque de Φ; dans le Tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_p & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \ldots & \beta_p & \beta_{p+1} & \ldots & \beta_n \end{matrix} \right\|,$$

tous les déterminants d'ordre $p+1$ sont nuls, d'où

$$\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \ldots = \beta_n = 0.$$

Nous avons donc à rechercher tous les systèmes de nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ qui permettent d'écrire l'identité

$$\Phi(y_1+\beta_1, y_2+\beta_2, \ldots, y_p+\beta_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n).$$

Nous voyons qu'on peut faire abstraction des variables $y_{p+1}, \ldots, y_n$; elles ne jouent plus aucun rôle. Il suffit de remarquer que la fonction Φ considérée comme fonction des seules variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ est irréductible ou plus exactement elle n'est pas réductible pour tout système de valeurs attribuées à $y_{p+1}, \ldots, y_n$. Donnons alors à ces variables des valeurs fixes $y^0_{p+1}, \ldots, y^0_n$ qui rendent Φ irréductible et posons

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p; y^0_{p+1}, \ldots, y^0_n).$$

Si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ sont les éléments d'une période quelconque on aura, quels que soient les entiers $m, n_1, n_2, \ldots, n_p$,

$$\Psi(y_1+m\beta_1+n_1a_1, y_2+m\beta_2+n_2a_2, \ldots, y_p+m\beta_p+n_pa_p) = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_p).$$

Or, d'après un théorème connu, employé notamment par MM. Hermite et Kronecker dans leurs recherches sur les périodes, *on peut choisir les entiers* $m, n_1, n_2, \ldots, n_p$, *avec* $m \neq 0$, *de façon que les nombres*

$$m\beta_1+n_1a_1, \quad m\beta_2+n_2a_2, \quad \ldots, \quad m\beta_p+n_pa_p$$

soient en valeur absolue inférieurs à tout nombre donné ε.

Si les rapports $\frac{\beta_1}{a_1}, \frac{\beta_2}{a_2}, \ldots, \frac{\beta_p}{a_p}$ ne sont pas *tous* commensurables, les nombres $m\beta_i+n_ia_i$ *quoique infiniment petits ne sont pas tous nuls*. La fonction Ψ admettrait donc des périodes infiniment petites, ce qui est impossible puisqu'elle est irréductible.

Les rapports $\frac{\beta_1}{a_1}, \ldots, \frac{\beta_p}{a_p}$ sont par suite *tous commensurables* et l'on peut poser

$$\beta_1 = \mu_1 a_1, \qquad \beta_2 = \mu_2 a_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_p = \mu_p a_p,$$

les coefficients μ_i étant des nombres rationnels.

Ceci montre déjà que l'*ensemble des périodes de la fonction* Ψ, *ou* Φ, *ou* F *est dénombrable.*

Le *nombre maximum* p, de périodes distinctes, s'appellera l'*ordre périodique* de la fonction F.

Systèmes minimum. — Mais nous pouvons aller plus loin encore. Raisonnons sur la fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ périodique séparément par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$, et d'ordre périodique p.

Dans l'espace à n dimensions marquons tous les points de coordonnées $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, 0, \ldots, 0)$ correspondant aux diverses périodes de la fonction Φ. Ces points sont d'ailleurs tous contenus dans un espace à p dimensions.

Les modules des périodes ont un minimum absolu ρ différent de 0, puisqu'il n'y a pas de périodes infiniment petites; par conséquent la distance de deux points périodes quelconques est supérieure ou au plus égale à ρ, de sorte qu'un espace limité contient un nombre limité de points.

Il suit de là qu'on pourra trouver un volume parallélépipédique ayant l'origine comme sommet, des points périodes comme sommets adjacents, et *tel qu'il n'y ait aucun point période à son intérieur ni sur ses faces.*

Avec ce parallélépipède fondamental on peut construire un réseau de parallélépipèdes dont tous les sommets sont des points périodes.

S'il existait quelque part un point période qui ne fût pas un sommet de ce réseau, son homologue dans le parallélépipède fondamental serait aussi un point période, ce qui est impossible.

Nous appellerons *système minimum tout système de p périodes qui définit ainsi un parallélépipède fondamental.*

Il est dès lors évident que, si les p périodes $\omega_1(a_1, 0, \ldots\ldots, 0)$, $\omega_2(0, a_2, \ldots\ldots, 0), \ldots, \omega_p(0, \ldots, 0, a_p, 0, \ldots, 0)$ de la fonction Φ forment un système minimum, une période quelconque a ses éléments de la forme

$$\beta_1 = m_1 a_1, \qquad \beta_2 = m_2 a_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_p = m_p a_p, \qquad \beta_{p+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = 0,$$

les coefficients m_i *étant des entiers;* inversement $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ définissent une période quels que soient les entiers m_i.

Géométriquement on peut dire encore que si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont p pé-

riodes distinctes formant un système minimum, toute période ω est une somme géométrique de la forme

$$\omega = m_1(\omega_1) + m_2(\omega_2) + \ldots + m_p(\omega_p),$$

propriété qui est ainsi indépendante du choix des axes de coordonnées.

Les systèmes de périodes minimum correspondent à la période minimum dans le cas d'une fonction périodique d'une seule variable, mais dans le cas d'une fonction périodique de plusieurs variables, ou plus exactement dans le cas des fonctions périodiques d'ordre plus grand que *un*, il y a une infinité de systèmes minimum, et il est facile de voir comment ils se déduisent les uns des autres.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction irréductible quelconque, périodique d'ordre p; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ un système de périodes minimum; $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_p$ un second système minimum. On a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 = m_1^1(\omega_1) + m_2^1(\omega_2) + \ldots + m_p^1(\omega_p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega'_p = m_1^p(\omega_1) + m_2^p(\omega_2) + \ldots + m_p^p(\omega_p) \end{array} \right\} \qquad m_i^j \text{ entier.}$$

Il faut exprimer qu'une période quelconque

$$\omega = m_1(\omega_1) + m_2(\omega_2) + \ldots + m_p(\omega_p) \qquad (m_i \text{ entier})$$

s'exprime par une somme géométrique de la même forme au moyen de ω'_1, $\omega'_2, \ldots, \omega'_p$

$$\omega = \mu_1(\omega'_1) + \ldots + \mu_p(\omega'_p) \qquad (\mu_i \text{ entier}),$$

il faut pour cela que, quels que soient les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, on puisse trouver les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ de façon que l'on ait

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1^1\mu_1 + m_1^2\mu_2 + \ldots + m_1^p\mu_p, \\ m_2 &= m_2^1\mu_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_2^p\mu_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_p &= m_p^1\mu_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_p^p\mu_p. \end{aligned}$$

La condition est immédiate, il faut que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_1^2 & \ldots & m_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_p^1 & \ldots & \ldots & m_p^p \end{vmatrix},$$

qui est nécessairement différent de 0, soit égal à ± 1. C'est une condition nécessaire et manifestement suffisante.

Dans un tel déterminant les termes d'une même rangée sont nécessairement premiers entre eux, et à part cette condition ils sont arbitraires.

Plus généralement tous les déterminants d'ordre k que l'on peut former avec les éléments de k rangées parallèles sont premiers entre eux, comme le montre le développement de Δ, suivant la règle de Laplace, et, à part cette condition, ils sont arbitraires (¹).

Supposons que les vecteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ soient dirigés suivant les axes de coordonnées $ox_1, ox_2, \ldots, ox_p$, soient $(a_1 0 \ldots 0), (0 a_2 0 \ldots 0), \ldots$ les coordonnées de leurs extrémités. — $\omega'_1 \omega'_2 \ldots \omega'_p$ étant un système minimum quelconque défini par les formules (1), on a

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} m_1^1 a_1 & m_2^1 a_2 & \ldots & m_p^1 a_p \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_1^p a_1 & \ldots & \ldots & m_p^p a_p \end{vmatrix} = \Delta \times a_1 a_2 \ldots a_p = \pm a_1 a_2 \ldots a_p;$$

le déterminant formé avec les éléments (²) *des périodes d'un système minimum a la même valeur pour tous les systèmes minimum.*

Si l'on considérait, au contraire, p périodes distinctes quelconques, le même déterminant

$$\mathrm{M}' = \begin{vmatrix} m_1'^1 a_1 & m_2'^1 a_2 & \ldots & m_p'^1 a_p \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ m_1'^1 a_1 & \ldots\ldots & \ldots & m_p'^p a_p \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_p \begin{vmatrix} m_1'^1 & \ldots & m_p'^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1'^p & \ldots & m_p'^p \end{vmatrix}$$

serait toujours en valeur absolue supérieur à M.

Ces propriétés ont d'ailleurs une interprétation géométrique fort simple et bien connue dans les cas de deux et trois variables.

Dans le cas de deux variables ou plus exactement dans le cas des fonctions périodiques d'ordre 2, si l'on marque les points représentatifs (³) de deux périodes formant un système minimum quelconque, on a ce théorème :

(¹) Cela résulte immédiatement d'une Note (Note I) placée à la fin de ce travail.

(²) Je fais abstraction des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

(³) Les points représentatifs des périodes sont tous dans un même plan.

L'aire du parallélogramme construit sur ces points périodes est constante.

Dans le cas où l'ordre est égal à 3 :

Le volume V *du parallélépipède construit sur les trois périodes d'un système minimum quelconque est constant,* de plus le volume du parallélépipède construit sur trois périodes distinctes, qui ne forment pas un système minimum, est toujours supérieur à V.

Nous verrons plus loin une généralisation de ces propriétés qui est la suivante : si $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une fonction continue quelconque, périodique d'ordre p, l'intégrale

$$\int\int\ldots\int F(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

prise à l'intérieur du parallélépipède construit sur un système minimum de périodes est constante; en supposant F constant on obtient les résultats précédents.

Constitution de l'ensemble des périodes d'une fonction réductible. — Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction réductible à une fonction irréductible de q variables $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$. *L'ordre périodique de* F *sera par définition celui de la fonction* Φ, désignons-le par p, $(p \leqq q)$. Soit S la substitution qui permet de passer de F à Φ,

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1^1 x_1 + \lambda_2^1 x_2 + \ldots + \lambda_n^1 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p = \lambda_1^p x_1 + \lambda_2^p x_2 + \ldots + \lambda_n^p x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_q = \lambda_1^q x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^q x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \lambda_1^n x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_1^n x_n. \end{array}\right.$$

Il convient de remarquer que si l'on change arbitrairement les coefficients λ figurant dans les $n-q$ dernières formes linéaires précédentes, la fonction Φ reste invariable.

Nous avons divisé en deux classes les périodes de la fonction F : les

périodes impropres Ω [1] dont les éléments vérifient les équations

$$\lambda_1^1 \alpha_1 + \lambda_2^1 \alpha_2 + \ldots + \lambda_n^1 \alpha_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_1^q \alpha_1 + \lambda_2^q \alpha_2 + \ldots + \lambda_n^q \alpha_n = 0,$$

et qui disparaissent par la réduction, et les périodes propres qui se conservent intégralement.

Soient $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_p$, p périodes de la fonction Φ, *formant un système minimum;* désignons par ω_1 une période propre de F qui se transforme [2] par la substitution (S) en la période ω'_1, par ω_2 une période qui devient $\omega'_2, \ldots$, et par ω une période quelconque qui devient ω'.

On a alors entre $\omega', \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_p$ une relation géométrique de la forme

$$\omega' = m_1(\omega'_1) + m_2(\omega'_2) + \ldots + m_p(\omega'_p),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_p$ désignant des entiers, d'où

$$\omega = m_1(\omega_1) + m_2(\omega_2) + \ldots + m_p(\omega_p) + (\Omega),$$

Ω désignant une période impropre ou une somme géométrique de périodes impropres quelconques.

L'ensemble des périodes est donc formé par l'association de deux ensembles : l'un dénombrable obtenu en faisant varier les entiers positifs, négatifs ou nuls $m_1, m_2, \ldots, m_p$; l'autre continu, constitué par l'ensemble des périodes impropres Ω qui dépendent de $n - q$ paramètres arbitraires.

Remarque. — Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction réductible à q variables et périodique d'ordre p. On peut écrire identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q),$$

$y_1, y_2, \ldots, y_q$ désignant q formes linéaires indépendantes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et Φ une fonction irréductible. Un système P de p périodes propres distinctes de F se transforme en un système P′ de p périodes distinctes de Φ.

---

(1) *Voir* pages 23 et 24.

(2) La période ω_1 n'est définie qu'à une somme géométrique de périodes impropres près.

Par une substitution linéaire, à déterminant différent de 0, sur les q variables y, on peut transformer les périodes P′ en vecteurs périodes dirigés suivant les nouveaux axes de coordonnées, les nombres périodes correspondants ayant des valeurs arbitraires données à l'avance $a_1, a_2, \ldots, a_p$, de sorte que finalement, en combinant les deux opérations, on voit qu'il existe q formes linéaires indépendantes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = \lambda_1^1 x_1 + \lambda_2^1 x_2 + \ldots + \lambda_n^1 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_q = \lambda_1^q x_1 + \lambda_2^q x_2 + \ldots + \lambda_n^q x_n, \end{cases}$$

telles que l'on ait identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots, y_q),$$

Φ étant une fonction irréductible périodique séparément par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Si le système de périodes P est minimum, la fonction Φ se trouve elle-même rapportée à un système minimum.

Il est facile de former des équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients λ des formes (1). Si l'on désigne par $\omega_1(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, \omega_p(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$ les éléments des périodes P dans F, on doit avoir

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda_1^1 \quad \alpha_1^i + \lambda_2^1 \alpha_2^i + \ldots + \lambda_n^1 \quad \alpha_n^i = 0, \\ \lambda_1^2 \quad \alpha_1^i + \lambda_2^2 \alpha_2^i + \ldots + \lambda_n^2 \quad \alpha_n^i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1^i \quad \alpha_1^i + \lambda_2^i \alpha_2^i + \ldots + \lambda_n^i \quad \alpha_n^i = a_i, \\ \lambda_1^{i+1} \alpha_1^i + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^{i+1} \alpha_n^i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1^q \quad \alpha_1^i + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^q \quad \alpha_n^i = 0; \end{cases}$$

l'on a ainsi p groupes de relations analogues obtenues en faisant

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations n'indiquent pas immédiatement la forme que doit avoir la substitution (1). On peut trouver cependant des formes assez remarquables

de ces substitutions. Adjoignons aux formes (1) $n-q$ nouvelles formes

$$(3)\qquad \begin{cases} y_{q+1} = \lambda_1^{q+1} x_1 + \lambda_2^{q+1} x_2 + \ldots + \lambda_n^{q+1} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n \;\; = \lambda_1^n \;\; x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^n \;\; x_n, \end{cases}$$

définissant avec les q premières une substitution complète; ces $n-q$ formes sont arbitraires, assujetties simplement à cette condition que le déterminant des n formes (1) et (3) soit différent de 0. Les formes (1) et (3) peuvent être résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et si l'on porte ces valeurs dans F il est clair que l'on obtient toujours la même fonction $\Phi(y_1, \ldots, y_q)$. Soient donc

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = \mu_1^1 y_1 + \mu_1^2 y_2 + \ldots + \mu_1^p y_p + \mu_1^{p+1} y_{p+1} + \ldots + \mu_1^n y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \mu_n^1 y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^p y_p + \mu_n^{p+1} y_{p+1} + \ldots + \mu_n^n y_n, \end{cases}$$

les formes (1) et (3) résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons la période $\omega_i(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ par exemple de la fonction F. La substitution complète représentée par les formules (1) et (3) lui fait correspondre les éléments $(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0, \beta_{q+1}^i, \ldots, \beta_n^i)$, les β n'étant pas nécessairement nuls. Effectuons la nouvelle substitution

$$\begin{aligned} z_1 \;\; &= y_1, \\ z_2 \;\; &= y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ z_p \;\; &= y_p, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ z_q \;\; &= y_q, \\ z_{q+1} &= \nu_1^{q+1} y_1 + \nu_2^{q+1} y_2 + \ldots + \nu_q^{q+1} y_q + \nu_{q+1}^{q+1} y_{q+1} + \ldots + \nu_n^{q+1} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n \;\; &= \nu_1^n y_1 + \nu_2^n y_2 + \ldots + \nu_q^n y_q + \nu_{q+1}^n y_{q+1} + \ldots + \nu_n^n y_n \end{aligned}$$

où les coefficients ν, provisoirement arbitraires, vérifient seulement l'inégalité

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_{q+1}^{q+1} & \ldots & \nu_n^{q+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_{q+1}^n & \ldots & \nu_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

le module de la nouvelle substitution étant ainsi différent de zéro. Par cette

substitution qui est, en définitive, une substitution sur les x, la fonction Φ, ou si l'on veut la fonction F, se transforme en une nouvelle fonction irréductible $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots, z_q)$ périodique séparément par rapport à z_1, $z_2, \ldots, z_p$, de sorte que par la substitution totale, à déterminant non nul,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = k_1^1 z_1 + \ldots + k_1^n z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = k_n^1 z_1 + \ldots + k_n^n z_n, \end{array} \right.$$

les p périodes données de F se transforment en p périodes de Ψ dirigées suivant les axes $oz_1, \ldots, oz_p$.

Or, déterminons les coefficients ν de façon que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \nu_1^{q+i} a_1 + \nu_{q+1}^{q+i} \beta_{q+1}^1 + \ldots + \nu_n^{q+i} \beta_n^1 \\ 0 = \nu_2^{q+i} a_2 + \nu_{q+1}^{q+i} \beta_{q+1}^2 + \ldots + \nu_n^{q+i} \beta_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \nu_p^{q+i} a_p + \nu_{q+1}^{q+i} \beta_{q+1}^p + \ldots + \nu_n^{q+i} \beta_n^p \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \ldots, n-q,$$

cela est toujours possible tout en satisfaisant à la condition $\Delta \neq 0$, puisque ces équations sont résolues par rapport à $\nu_1^{q+i}, \nu_2^{q+i}, \ldots, \nu_p^{q+i}$ avec $i = 1, 2, \ldots, n-q$ et que $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont différents de 0. Dans ces conditions, les formules (5) font correspondre aux systèmes de valeurs $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p)$ attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement les systèmes de valeurs $(\overbrace{a_1, 0, 0, \ldots, 0}^{n}), (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ attribuées à $z_1, z_2, \ldots, z_n$; elles sont donc de la forme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha_1^1 \dfrac{z_1}{a_1} + \alpha_1^2 \dfrac{z_2}{a_2} + \ldots + \alpha_1^p \dfrac{z_p}{a_p} + k_1^{p+1} z_{p+1} + \ldots + k_1^n z_n, \\ x_2 = \alpha_2^1 \dfrac{z_1}{a_1} + \alpha_2^2 \dfrac{z_2}{a_2} + \ldots + \alpha_2^p \dfrac{z_p}{a_p} + k_2^{p+1} z_{p+1} + \ldots + k_2^n z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n^1 \dfrac{z_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n^p \dfrac{z_p}{a_p} + k_n^{p+1} z_{p+1} + \ldots + k_n^n z_n, \end{array} \right.$$

formules où entrent explicitement les éléments des périodes $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$ qui par la substitution (6) se transforment en périodes axiales.

En définitive, nous avons établi que, étant donnée une fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

réductible à q variables et périodique d'ordre p, il existe des substitutions linéaires de la forme (6) qui ramènent F à une fonction irréductible $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots, z_q)$ périodique séparément par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$; les nombres périodes correspondants $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pouvant être choisis arbitrairement ainsi que le système des p périodes propres distinctes $\omega_1(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, \omega_p(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$ de la fonction F qui doivent leur correspondre linéairement.

Conclusion. — Je résume maintenant les traits essentiels des résultats obtenus. Une fonction périodique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant donnée (on suppose que F satisfait aux conditions de la page 16, ou plus généralement, que ses fonctions irréductibles n'ont pas de périodes infiniment petites), nous avons défini :

1° *L'ordre de réductibilité*, c'est-à-dire le nombre minimum q de variables indépendantes, fonctions linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen desquelles on peut exprimer F;

2° *L'ordre périodique* p, c'est-à-dire le nombre maximum de périodes propres distinctes de la fonction donnée, le nombre p étant nécessairement inférieur, au plus égal à q. Les fonctions pour lesquelles p est égal à q admettent le maximum de périodes; ce sont les fonctions que l'on pourrait appeler *entièrement périodiques*, les autres étant par opposition des fonctions *partiellement périodiques*.

ÉTUDE D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Nous rencontrerons fréquemment dans la suite des fonctions qui, sans être irréductibles, sont périodiques *séparément* par rapport à un certain nombre de variables.

Soit, pour considérer le cas le plus simple, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction que nous supposerons réductible à q variables par substitution linéaire, et périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ séparément. Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les

périodes correspondantes. Nous supposons de plus que la fonction F n'est *constante par rapport* à aucune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'elle contient toutes effectivement.

Quel est l'ordre périodique de la fonction F? Nous allons montrer qu'il est égal à q, c'est-à-dire que la fonction F est entièrement périodique.

Soient, en effet,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1^1 x_1 + \lambda_2^1 x_2 + \ldots + \lambda_n^1 x_n, \\ y_2 = \lambda_1^2 x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^2 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_q = \lambda_1^q x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^q x_n, \end{array}\right.$$

les q formes linéaires indépendantes qui transforment F en la fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$. Il y a parmi les déterminants que l'on peut former avec les λ un déterminant d'ordre q différent de zéro. De plus, les coefficients $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^q$ relatifs à une même colonne quelconque, celle de rang i, ne sont pas tous nuls sans quoi F ne contiendrait pas la variable x_i.

Ceci posé, nous connaissons n périodes de la fonction F, les périodes $\omega_1(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\omega_2(0, a_2, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\omega_n(0, 0, \ldots, 0, a_n)$. Au moyen des formes (1) elles se transforment en périodes dont les éléments sont respectivement

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \omega'_1, & \lambda_1^1 a_1, & \lambda_1^2 a_1, & \ldots, & \lambda_1^q a_1, \\ \omega'_2, & \lambda_2^1 a_2, & \lambda_2^2 a_2, & \ldots, & \lambda_2^q a_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega'_i, & \lambda_i^1 a_i, & \lambda_i^2 a_i, & \ldots, & \lambda_i^q a_i, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega'_n, & \lambda_n^1 a_n, & \lambda_n^2 a_n, & \ldots, & \lambda_n^q a_n. \end{array}\right.$$

On voit d'abord que les éléments de la période ω_i, par exemple, ne peuvent être tous nuls, puisque les coefficients $\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^q$ ne sont pas tous nuls. Donc, *les périodes* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *sont nécessairement des périodes propres*. Cherchons combien il y en a de distinctes (p. 25). Pour cela, dans le Tableau des éléments (2) il faudra trouver l'ordre du déterminant d'ordre le plus élevé qui ne soit pas nul. Les a étant différents de zéro cet ordre est exactement égal à q, puisque les formes (1) sont indépendantes. La fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ possédant q périodes distinctes est donc entièrement périodique.

On peut effectuer sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$ une nouvelle substitution linéaire, à déterminant non nul, de façon que q périodes propres distinctes arbitrairement choisies (ici $p = q$) deviennent des périodes dirigées suivant les nouveaux axes de coordonnées (on pourrait choisir, en particulier, un système minimum de périodes). En combinant les deux substitutions successives, on voit qu'il existe q formes linéaires, que nous supposerons être les formes (1), transformant F en une fonction irréductible, que nous supposerons être la fonction Φ, et périodique par rapport à toutes les variables, les périodes correspondantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$ pouvant d'ailleurs être arbitrairement choisies, et nous avons même indiqué (p. 36) des formes particulières de ces substitutions.

La substitution (1) prend ici une forme remarquable qu'il est aisé d'obtenir directement. Observons en effet que toute période de la fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ a ses éléments de la forme $k_1 b_1, k_2 b_2, \ldots, k_q b_q$, où $k_1, \ldots, k_q$ sont des nombres rationnels (p. 28), des entiers si les périodes axiales constituent un système minimum.

Or, considérons la période transformée de la période $\omega_i(0, 0, \ldots, 0, a_i, 0, 0)$, ses éléments deviennent dans Φ

$$\lambda_i^1 a_i, \quad \lambda_i^2 a_i, \quad \ldots, \quad \lambda_i^q a_i,$$

d'où, cette conclusion que les nombres

$$\frac{\lambda_i^1 a_i}{b_1} = \mu_i^1, \qquad \frac{\lambda_i^2 a_i}{b_2} = \mu_i^2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\lambda_i^q a_i}{b_q} = \mu_i^q$$

sont rationnels, de sorte que les formes linéaires (1) peuvent s'écrire

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_1}{b_1} = \mu_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \mu_2^1 \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{x_n}{a_n}, \\[2ex] \dfrac{y_2}{b_2} = \mu_1^2 \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^2 \dfrac{x_n}{a_n}, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex] \dfrac{y_q}{b_q} = \mu_1^q \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^q \dfrac{x_n}{a_n}, \end{array} \right.$$

les coefficients μ_i^j *étant rationnels, entiers si le système des périodes axiales* dans Φ est un système minimum.

Il y a évidemment une infinité de formes linéaires telles que (3) qui permettent de transformer F en une fonction irréductible périodique par rapport à chaque variable. A tout système de q périodes propres, choisies dans F, que l'on veut rendre axiales correspond une substitution de la forme (3), ou plus exactement un ensemble de substitutions de cette forme où seuls les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_q$ restent arbitraires.

Si l'on fait sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$ une nouvelle substitution, de façon que les nouveaux axes portent encore des vecteurs périodes, cette substitution s'écrit

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{z_1}{c_1} = \nu_1^1 \dfrac{y_1}{b_1} + \nu_2^1 \dfrac{y_2}{b_2} + \ldots + \nu_q^1 \dfrac{y_q}{b_q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{z_q}{c_q} = \nu_1^q \dfrac{y_1}{b_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \nu_q^q \dfrac{y_q}{b_q} \end{array} \right\} \quad \nu_i^j \text{ rationnels,}$$

et l'on voit comment se rattachent entre elles les substitutions de la forme (3).

Supposons que l'on choisisse dans F deux systèmes minimum S, S′ de périodes propres. Au système S correspond par une substitution de la forme (3) une fonction $\Phi(y_1, \ldots, y_q)$ dans laquelle les périodes du système S sont transformées en périodes $(b_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, b_q)$ dirigées suivant les axes et formant dans Φ un système minimum. De même, au système S′ correspond, par une substitution de la forme (3), une fonction $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ dans laquelle les périodes du système S′ sont transformées en périodes $(c_1, 0, \ldots, 0) \ldots, (0, \ldots, 0, c_q)$ dirigées suivant les axes et formant dans Ψ un système minimum. Entre les variables $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ existent des relations de la forme (4). Mais ici les coefficients ν_i^j sont entiers, et l'on a de plus

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_1^1 & \ldots & \nu_q^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^q & \ldots & \nu_q^q \end{vmatrix} = \pm 1.$$

En effet, les périodes $(b_1, 0, \ldots, 0), (0, b_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, b_q)$ se transforment par la substitution (4) en périodes de coordonnées respectives $(\nu_1^1 c_1, \nu_1^2 c_2, \ldots, \nu_1^q c_q), \ldots, (\nu_q^1 c_1, \ldots, \nu_q^q c_q)$; ces périodes forment en-

core un système minimum, ce qui exige : 1° que les coefficients ν_i^l soient entiers; 2° que le déterminant Δ soit égal à ± 1 comme cela résulte de ce qui a été établi page 30.

On remarquera que si l'on connaît une substitution de la forme (3) et, en particulier, une substitution correspondant à un système minimum de q périodes propres, il est aisé d'obtenir *toutes* les périodes de la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les éléments d'une période quelconque, ces nombres vérifient les équations linéaires

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 = \mu_1^1 \dfrac{\alpha_1}{a_1} + \mu_2^1 \dfrac{\alpha_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{\alpha_n}{a_n}, \\ m_2 = \mu_1^2 \dfrac{\alpha_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^2 \dfrac{\alpha_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_q = \mu_1^q \dfrac{\alpha_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^q \dfrac{\alpha_n}{a_n}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les inconnues et $m_1, m_2, \ldots, m_q$ des entiers quelconques pouvant être nuls. Cela résulte du fait que les périodes se transforment par les substitutions linéaires et que, d'autre part (p. 29), les périodes de Φ ont des éléments de la forme $m_1 b_1, \ldots, m_q b_q$. Si les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_q$ sont tous nuls, on obtient ainsi l'ensemble des périodes impropres.

Fonctions de fonctions périodiques. — A la classe de fonctions que nous étudions actuellement appartiennent les fonctions de fonctions périodiques, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$F[u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)],$$

dans laquelle $u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)$ sont des fonctions périodiques de périodes respectives $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nous supposons : 1° que la fonction F n'est constante par rapport à aucune des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$; 2° que les fonctions périodiques $u_i(x_i)$ ne sont pas constantes. Dans ces conditions la fonction $F[u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)]$ n'est constante par rapport à aucune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous bornant au cas particulier où les fonctions F, $u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)$ sont des fonctions continues, nous démontrerons le théorème suivant :

La fonction $F[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)]$ *est irréductible.*

La démonstration nous indiquera d'ailleurs à quelles conditions cette proposition s'étendrait au cas de fonctions discontinues.

Pour établir le théorème je remarque d'abord que, si $u(x)$ est une fonction périodique continue, l'équation

$$u(x+\alpha) - u(x) = 0$$

a des racines, quelle que soit la constante α. S'il en était autrement la fonction continue $u(x+\alpha) - u(x)$ garderait un signe constant, elle serait positive, par exemple, sans être jamais nulle; on aurait donc, quel que soit x,

$$u(x+\alpha) - u(x) > 0$$

et, par suite aussi, quel que soit l'entier positif n,

$$u(x+n\alpha) - u(x) > 0;$$

si α est commensurable avec la période a $\left(\alpha = \frac{pa}{q}\right)$, cela est manifestement impossible puisqu'il suffirait de prendre $n = q$ pour avoir

$$u(x+q\alpha) - u(x) = 0;$$

si α est incommensurable avec a, étant donnés x et y quelconques, on peut choisir les entiers m et n, n étant positif, de façon que $x + n\alpha$ soit aussi voisin qu'on le veut de $y + ma$; d'où résulterait (puisque $u(x)$ est une fonction continue) que, quels que soient x et y, on aurait

$$u(y) - u(x) \geqq 0,$$

ce qui est absurde. L'équation $u(x+\alpha) - u(x) = 0$ a donc des racines quel que soit α.

Ceci posé, remarquons que, la fonction F étant continue, elle satisfait aux conditions de la page 16; par conséquent les fonctions irréductibles que l'on en déduit par substitution linéaire n'ont pas de périodes infiniment petites.

Je dis d'autre part qu'il est impossible de la supposer réductible. S'il en était ainsi, en effet, il existerait q formes linéaires indépendantes

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1^1 x_1 + \lambda_2^1 x_2 + \ldots + \lambda_n^1 x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_q = \lambda_1^q x_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n^q x_n \end{array}\right\} \quad q < p,$$

qui la transformeraient en une fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$.

Il existe un déterminant d'ordre q formé avec les λ qui est différent de o. Supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \ldots & \lambda_q^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^q & \lambda_2^q & \ldots & \lambda_q^q \end{vmatrix} \neq 0.$$

De plus, la condition que F n'est constante par rapport à aucune variable se traduit par ce fait que les coefficients d'une même colonne $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^q$ ne sont pas nuls à la fois ($i = 1, 2, \ldots, n$). Or, considérons les deux systèmes de valeurs suivantes attribuées aux variables x

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q, & x_{q+1}, & \ldots, & x_n, \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_q, & x'_{q+1}, & \ldots, & x'_n, \end{array}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont arbitraires, les autres valeurs des variables satisfaisant aux équations

$$u_q(x'_{q+1}) - u_q(x_{q+1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad u_n(x'_n) - u_n(x_n) = 0,$$

et les différences

$$x'_{q+1} - x_{q+1} = \xi_{q+1} \qquad \ldots, \qquad x'_n - x_n = \xi_n$$

étant, pour l'instant, arbitrairement données. D'après la remarque concernant l'existence des racines de $u(x+\alpha) - u(x) = 0$, on peut toujours choisir $x_{q+1}, x'_{q+1}, x_{q+2}, x'_{q+2}, \ldots, x_n, x'_n$ de façon qu'il en soit bien ainsi. Désignons par $(y_1, y_2, \ldots, y_q), \ldots, (y'_1, y'_2, \ldots, y'_q)$ les systèmes de valeurs des y correspondant aux deux systèmes de valeurs choisies pour les x. Comme l'on a

$$F[u_1(x_1), \ldots, u_q(x_q), u_{q+1}(x'_{q+1}), \ldots, u_n(x'_n)] = F[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)],$$

on a aussi

$$\Phi(y'_1, y'_2, \ldots, y'_q) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q).$$

Posons

$$y'_1 = y_1 + \beta_1, \qquad y'_2 = y_2 + \beta_2, \qquad \ldots, \qquad y'_q = y_q + \beta_q.$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ sont respectivement égaux à

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda^1_{q+1}\xi_{q+1} + \lambda^1_{q+2}\xi_{q+2} + \ldots + \lambda^1_n\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_q &= \lambda^q_{q+1}\xi_{q+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda^q_n\xi_n. \end{aligned}$$

Les nombres $\xi_{q+1}, \ldots, \xi_n$ sont arbitraires, on pourra toujours les choisir de façon que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ ne soient pas tous nuls. On pourra prendre, par exemple, $\xi_{q+1} = 0$, $\xi_{q+2} = 0$, $\ldots$, $\xi_{n-1} = 0$, $\xi_n \neq 0$, auquel cas on aurait simplement

$$\begin{aligned} \lambda^1_n\xi_n &= \beta_1, \\ \lambda^2_n\xi_n &= \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda^q_n\xi_n &= \beta_q, \end{aligned}$$

et nous savons que $\lambda^1_n, \lambda^2_n, \ldots, \lambda^q_n$ ne sont pas tous nuls. On voit même que l'on peut choisir ξ_n de façon que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, sans être tous nuls, soient aussi petits que l'on veut.

Les nombres ξ et β étant ainsi déterminés, on a

$$\Phi(y_1 + \beta_1, y_2 + \beta_2, \ldots, y_q + \beta_q) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q),$$

relation qui a lieu quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_q$, les autres variables $x_{q+1}, \ldots, x_n, x'_{q+1}, \ldots, x'_n$ ayant des valeurs déterminées qui ne *dépendent pas* de $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \ldots & \lambda^1_q \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^q_1 & \ldots & \lambda^q_q \end{vmatrix}$$

est différent de 0, les formules de substitution montrent que $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont également arbitraires, puisqu'on peut les résoudre par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_q$ qui sont eux-mêmes quelconques.

On voit, en définitive, que la relation

$$\Phi(y_1+\beta_1, \ldots, y_q+\beta_q) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$$

a lieu quels que soient $y_1, y_2, \ldots, y_q$, c'est-à-dire que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ définissent une période de cette fonction. Comme, d'autre part, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ peuvent être pris aussi petits que l'on veut, la fonction Φ admettrait des périodes infiniment petites; c'est impossible puisque Φ est irréductible. On ne peut donc pas supposer que la fonction F soit réductible.

La démonstration suppose simplement : 1° que les fonctions irréductibles déduites de la fonction $F[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)]$ n'admettent pas de périodes infiniment petites; 2° que parmi les fonctions $u_{q+1}(x_{q+1}), \ldots, u_n(x_n)$ il y en a au moins une pour laquelle les équations $u(x+\alpha)-u(x)=0$ ont des racines, et cela pour des valeurs de α aussi petites que l'on veut, sans même que cela doive avoir lieu pour toutes les valeurs de α. Toutes ces conditions sont réalisées lorsque les fonctions F et u sont continues.

Fonctions entièrement périodiques à périodes indépendantes. — Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction, réductible ou non, périodique séparément par rapport à chaque variable, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les périodes correspondantes. Je dirai que *les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes s'il n'existe entre ces nombres aucune relation de la forme*

$$\frac{\mu_1}{a_1}+\frac{\mu_2}{a_2}+\ldots+\frac{\mu_n}{a_n}=0,$$

dans laquelle $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des nombres rationnels positifs ou négatifs mais non nuls à la fois. Les fonctions périodiques pour lesquelles les périodes sont indépendantes joueront dans la suite de ce travail un rôle capital.

Supposons la fonction F réductible linéairement à q variables.

Nous avons vu page 39 que, étant donné un système de q périodes propres distinctes mais quelconques, on peut transformer F en une fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ périodique séparément par rapport à chaque variable, les périodes correspondantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$ étant arbitraires et

cela au moyen de q formes linéaires

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_1}{b_1} = \mu_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \mu_2^1 \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{x_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_q}{b_q} = \mu_1^q \dfrac{x_1}{a_1} + \mu_2^q \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^q \dfrac{x_n}{a_n}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles les coefficients μ sont des nombres rationnels, des entiers si le système des q périodes choisies est un système minimum.

Puisque les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sont arbitraires, on peut les choisir de façon à vérifier les relations

$$(\sigma)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \dfrac{\mu_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{b_q} = \dfrac{\mu_1^q}{a_1} + \dfrac{\mu_2^q}{a_2} + \ldots + \dfrac{\mu_n^q}{a_n}; \end{array}\right.$$

cela est toujours possible, car les périodes $a_1, \ldots, a_n$ étant indépendantes, les seconds membres sont différents de zéro.

Si dans les formules (S) on fait alors

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

on aura aussi

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_q = x;$$

et, comme l'on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q),$$

on aura, en particulier,

$$F(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, x, \ldots, x).$$

De plus, les formes (S) étant indépendantes, il existe dans le Tableau

$$(T)\qquad \left\|\begin{array}{cccc} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^q & \mu_2^q & \ldots & \mu_n^q \end{array}\right\|$$

au moins un déterminant d'ordre q différent de zéro. Par conséquent les périodes $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sont aussi indépendantes. S'il existait, en effet, une relation à coefficients rationnels de la forme

$$\frac{\nu_1}{b_1} + \frac{\nu_2}{b_2} + \ldots + \frac{\nu_q}{b_q} = 0,$$

on en déduirait, au moyen des formules (σ) et en tenant compte de l'hypothèse que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes,

$$\begin{gathered}
\mu_1^1 \nu_1 + \mu_1^2 \nu_2 + \ldots + \mu_1^q \nu_q = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mu_n^1 \nu_1 + \mu_n^2 \nu_2 + \ldots + \mu_n^q \nu_q = 0;
\end{gathered}$$

relations qui, considérées comme des équations en $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$, n'ont d'autre solution que la solution nulle, puisque dans le Tableau (T) il y a un déterminant d'ordre q différent de zéro.

Il est clair que si, inversement, l'on assujettit les fonctions irréductibles $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$, périodiques en $y_1, y_2, \ldots, y_q$ et déduites linéairement de F, à satisfaire à l'identité

$$F(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, x, \ldots, x),$$

les périodes correspondantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sont nécessairement de la forme (σ), de plus elles sont indépendantes, et nous avons un moyen d'obtenir toutes les fonctions de la forme Φ. A chaque système P de q périodes propres distinctes, choisies arbitrairement, dans F correspondent une substitution (S) et une fonction Φ. Les coefficients μ sont entiers si les q périodes choisies forment un système minimum.

Si $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ est une fonction analogue à Φ, et correspondant à un autre système P′ de q périodes propres distinctes, il est évident que Ψ se déduit de Φ par une substitution, à module différent de zéro, de la forme

$$\begin{gathered}
\frac{z_1}{c_1} = \nu_1^1 \frac{y_1}{b_1} + \ldots + \nu_q^1 \frac{y_q}{b_q}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{z_q}{c_q} = \nu_1^q \frac{y_1}{b_1} + \ldots + \nu_q^q \frac{y_q}{b_q},
\end{gathered}$$

et l'on a encore

$$\Phi(x, x, \ldots, x) = \Psi(x, x, \ldots, x) = F(x, x, \ldots, x);$$

les périodes $c_1, c_2, \ldots, c_q$, qui sont indépendantes, vérifient les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \frac{\nu_1^1}{b_1} + \ldots + \frac{\nu_q^1}{b_q}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{c_q} &= \frac{\nu_1^q}{b_1} + \ldots + \frac{\nu_q^q}{b_q}. \end{aligned}$$

En particulier, si P, P′ sont des systèmes minimum de périodes, on a nécessairement

$$\begin{vmatrix} \nu_1^1 & \ldots & \nu_q^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^q & \ldots & \nu_q^q \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Faisons enfin une dernière remarque, qui n'est pas sans importance. Considérons la substitution (S) qui ramène F à Φ, le système P des périodes correspondantes étant minimum de sorte que les coefficients μ_i^j sont entiers. Comme nous l'avons vu page 41, les éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'une période quelconque [1] de la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_1^1 \frac{\alpha_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{\alpha_n}{a_n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_q &= \mu_1^q \frac{\alpha_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^q \frac{\alpha_n}{a_n}, \end{aligned}$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_q$ sont des entiers positifs ou négatifs quelconques pouvant être nuls.

En particulier, s'il existe une période de la fonction F dont les éléments soient tous commensurables avec l'un des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le nombre a_i par exemple, on peut affirmer : ou bien que tous ces éléments sont nuls à l'exception peut-être de celui de rang i, ou bien que la fonction F est constante par rapport à certaines des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

[1] Propre ou impropre.

Posons, en effet,

$$\alpha_1 = \lambda_1 a_i, \qquad \alpha_2 = \lambda_2 a_i, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \lambda_n a_i,$$

les λ étant rationnels; les formules précédentes donnent

$$\frac{m_j}{a_i} = \mu_1^j \frac{\lambda_1}{a_1} + \mu_2^j \frac{\lambda_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^j \frac{\lambda_n}{a_n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

d'où, avec l'hypothèse faite sur les a,

$$m_j - \lambda_i \mu_i^j = 0, \quad \lambda_1 \mu_1^j = 0, \quad \lambda_2 \mu_2^j = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_n \mu_n^j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q);$$

on en conclut, par exemple,

$$\lambda_1 \mu_1^1 = 0, \qquad \lambda_1 \mu_1^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_1 \mu_1^q = 0.$$

Si F n'est pas constante par rapport à x_1 les nombres $\mu_1^1, \ldots, \mu_1^q$ ne sont pas tous nuls et alors $\lambda_1 = 0$; on aurait de même $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{i-1} = 0$, $\lambda_{i+1} = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

On verrait de la même façon que si a est un nombre quelconque ne satisfaisant à aucune relation à coefficients rationnels de la forme

$$\frac{\mu}{a} = \frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_1}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{a_n},$$

la fonction F *ne peut admettre aucune période dont les éléments soient tous commensurables avec a.*

QUELQUES PROBLÈMES SUR LES FONCTIONS ENTIÈREMENT PÉRIODIQUES A PÉRIODES INDÉPENDANTES.

Je traiterai encore quelques problèmes qui nous seront utiles pour établir certaines propriétés des fonctions quasi-périodiques.

Soient $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction définie dans un certain domaine et $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des nombres donnés. Supposons que l'expression

$$\frac{F(x_1 + k_1 h, x_2 + k_2 h, \ldots, x_n + k_n h) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

ait une limite pour $h = 0$, et cela quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Appelons

$$\frac{F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}$$

cette limite. Si la fonction F admettait des dérivées partielles continues, on aurait évidemment

$$\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(k_1, \ldots, k_n)} = k_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + k_n \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

mais F′ peut parfaitement exister sans que F admette des dérivées partielles continues. Si même, la fonction F, tout en admettant des dérivées partielles, celles-ci n'étaient pas continues, la quantité $k_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + k_n \frac{\partial F}{\partial x_n}$ pourrait ne pas être égale à F′.

Il est clair que si tous les nombres k sont nuls à l'exception de k_i, on a

$$\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(0, \ldots, 0, k_i, 0, \ldots, 0)} = k_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

La façon même dont le symbole F′ est défini montre qu'il se transforme par substitution linéaire. En d'autres termes, si l'on effectue la substitution

$$x_i = \lambda_1^i y_1 + \lambda_2^i y_2 + \ldots + \lambda_n^i y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sur les variables $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \frac{\Phi'_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(l_1, l_2, \ldots, l_n)},$$

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ se déduisant de $k_1, k_2, \ldots, k_n$ par la même substitution linéaire.

Si l'on fait en particulier une substitution de la forme

$$x_i = \lambda_1^i y_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^i y_{n-1} + k_i y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients λ sont quelconques, à la seule condition que le déterminant de la substitution soit différent de 0, on a

$$\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}.$$

Il suit de là que, si $F(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction pour laquelle on a identiquement

$$\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(k_1, k_2 \ldots, k_n)} = 0,$$

et si l'on suppose par exemple $k_n \neq 0$, la fonction F dépend des seules différences

$$(k_n x_1 - k_1 x_n), \quad (k_n x_2 - k_2 x_n), \quad \ldots, \quad (k_n x_{n-1} - k_{n-1} x_n),$$

comme on le voit en effectuant la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + k_1 y_n, \\ x_2 &= y_2 + k_2 y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + k_{n-1} y_n, \\ x_n &= k_n y_n. \end{aligned}$$

Si la fonction F admet des périodes, toutes les périodes de F appartiennent évidemment à la fonction $\frac{F'(x_1, \ldots, x_n)}{(k_1, \ldots, k_n)}$.

Considérons maintenant des fonctions $F(x_1, \ldots, x_n)$ *périodiques séparément en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *les périodes correspondantes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *étant indépendantes.*

1° *Si la fonction*

$$F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h=0} \frac{F(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

est identiquement nulle, la fonction F *est constante.*

On a, en effet,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n).$$

Posons

$$u_1 = x_1 - x_n, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = x_{n-1} - x_n;$$

la fonction θ pourrait ne pas contenir toutes les variables u; supposons qu'elle en contienne p exactement, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ par exemple. La fonction

$\theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ admet, relativement aux variables u, les périodes qui ont respectivement pour éléments

$$(a_1, 0, \ldots, 0), \quad (0, a_2 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, \ldots, 0 a_p), \quad (-a_n, -a_n, \ldots, -a_n);$$

or a_n ne vérifie par hypothèse aucune relation à coefficients rationnels de la forme

$$\frac{\mu_n}{a_n} = \frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_p}{a_p},$$

ce qui, d'après la remarque de la page 49, exige que θ ne contienne pas toutes les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

La fonction θ est donc constante, ce qui établit la proposition.

2° Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à périodes indépendantes; *toutes les périodes de la fonction* $F'(x_1, \ldots, x_n)$ *appartiennent à* F.

Soient en effet $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les éléments d'une période de la fonction F', et considérons la fonction

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

elle est périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on a de plus

$$\Psi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;$$

par conséquent, d'après la proposition précédente, Ψ est constant, c'est-à-dire

$$F(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A.$$

Ceci posé, supposons que la fonction F soit continue au moins en un point, le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On aura, quels que soient les entiers $m, m_1, m_2, \ldots, m_n$,

$$F(x_1 + m\alpha_1 + m_1 a_1, x_2 + m\alpha_2 + m_2 a_2, \ldots, x_n + m\alpha_n + m_n a_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = mA.$$

Or, d'après un théorème déjà cité (p. 28), on peut déterminer les entiers $m, m_1, \ldots, m_n$, avec $m \neq 0$, de façon que les quantités

$$m\alpha_1 + m_1 a_1, \quad m\alpha_2 + m_2 a_2, \quad \ldots, \quad m\alpha_n + m_n a_n$$

soient en valeur absolue plus petites que toute quantité donnée. La fonc-

tion F étant continue au point $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et l'entier m différent de o, on en conclut que A, qui est un nombre fixe, est inférieur à tout nombre donné, c'est-à-dire

$$A = 0;$$

par suite,

$$F(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

La proposition est donc établie; *les fonctions* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *admettent les mêmes périodes; toute période de l'une appartient à l'autre;* toute période propre de l'une est période propre de l'autre; les ensembles des périodes impropres, les systèmes minimum sont identiques.

En particulier, *si l'une de ces fonctions est irréductible,* l'autre est *également irréductible,* car, la première n'admettant pas de périodes infiniment petites, il en est de même de la seconde, et c'est là un caractère certain d'irréductibilité [1]. D'une façon générale, les fonctions F, F′ ont le même ordre de réductibilité, c'est-à-dire qu'elles se ramènent par substitution linéaire à des fonctions irréductibles du même nombre de variables; toute substitution linéaire qui réduit le nombre des variables dans l'une, réduit de la même façon le nombre des variables dans l'autre. Enfin, s'il existe des dérivées d'ordre plus élevé F″, F‴, ..., toutes ces fonctions ont le même ordre de réductibilité.

Envisageons les formes linéaires (S)

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_1}{b_1} = \mu_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{x_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_q}{b_q} = \mu_1^q \dfrac{y_1}{b_1} + \ldots + \mu_n^q \dfrac{x_n}{a_n}, \end{array} \right.$$

que nous avons étudiées pages 46-48 et qui ramènent la fonction F à une fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ périodique en $y_1, y_2, \ldots, y_q$ dont les périodes

---

[1] Page 24 en note.

indépendantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sont déterminées par les formules

$$(\sigma)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \dfrac{\mu_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{b_q} = \dfrac{\mu_1^q}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{\mu_n^q}{a_n}. \end{array}\right.$$

Par la substitution (S) la fonction $F'(x_1, \ldots, x_n)$ devient une certaine fonction irréductible $\Phi_1(y_1, y_2, \ldots, y_q)$. Or, il est bien facile de voir que l'on a

$$\Phi_1(y_1, y_2, \ldots, y_q) = \lim_{h=0} \frac{\Phi(y_1+h, \ldots, y_q+h) - \Phi(y_1, \ldots, y_q)}{h} = \Phi'(y_1, y_2, \ldots, y_q).$$

En effet, lorsqu'on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le même accroissement h, $y_1, y_2, \ldots, y_q$ prennent, en vertu des relations (S) et (σ), le même accroissement h, ce qui établit la proposition.

Ainsi les substitutions (S) transforment $F(x_1, \ldots, x_n)$ et $F'(x_1, \ldots, x_n)$ respectivement en $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ et $\Phi'(y_1, y_2, \ldots, y_q)$.

Remarquons que si l'on pose

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, x, \ldots, x),$$

on a aussi

$$f'(x) = F'(x, x, \ldots, x) = \Phi'(x, x, \ldots, x).$$

Enfin si la fonction F admet des dérivées partielles continues, on a évidemment

$$F'(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Intégrales d'une fonction périodique à périodes indépendantes. — Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes. Nous allons étudier les fonctions $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui vérifient l'équation

$$(1)\qquad R'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ou, si l'on suppose que R admette des dérivées partielles continues,

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

nous appellerons ces fonctions des *intégrales* de l'équation (1) ou encore des *intégrales* de la fonction F. Nous porterons principalement notre attention sur le point de savoir s'il existe des intégrales périodiques.

Ce problème a été rencontré incidemment par M. Poincaré dans une étude [1] sur l'intégration des équations du problème des trois corps. M. Poincaré se l'est posé de la façon suivante [2] :

Étant donnée une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *périodique en* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, *déterminer une constante inconnue* C *et une fonction inconnue* $R(x_1, \ldots, x_n)$ *périodique en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vérifiant l'équation*

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C. \tag{2}$$

Supposant pour cela F et R développées en séries de Fourier

$$F = K + \sum A \cos 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \frac{m_2 x_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n} + D\right),$$

$$R = K_1 + \sum B \sin 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m_n x_n}{a_n} + E\right),$$

dans lesquelles les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ prennent toutes les valeurs positives ou nulles à l'exception de la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$, il suffira de prendre

$$C = K, \qquad E = D, \qquad B = \frac{A}{2\pi\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)}, \tag{3}$$

et ces valeurs sont bien déterminées si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, la constante K_1 reste arbitraire.

---

(1) Poincaré, *Sur l'intégration des équations du problème des trois corps* (*Bulletin astronomique*, t. XIV, année 1897, p. 241. Problème A).

(2) Je change les notations de M. Poincaré

Cette méthode indiquée par M. Poincaré suppose la fonction F développable en série de Fourier, et ensuite que la série R dont les termes sont donnés par les formules (3) est convergente. Or la convergence de cette série n'est pas assurée; il y a, en effet, des cas pour lesquels, bien que la fonction F soit développable en série de Fourier, et même qu'elle admette des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre q développables en série de Fourier, *il n'existe pas de fonction* R *périodique en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, satisfaisant aux conditions (2); la série déterminée par les formules (3) est alors divergente.

Considérons donc l'équation (1) et, pour plus de simplicité, supposons la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ continue. Il existe des intégrales de l'équation (1); telle est par exemple la fonction donnée par l'intégrale définie

$$(4) \qquad \int_{-a_1}^{0} F(x_1+\lambda, x_2+\lambda, \ldots, x_n+\lambda)\, d\lambda.$$

Si R et R_1 sont deux intégrales quelconques de l'équation (1), leur différence $R_1 - R$ dépend des seules variables

$$u_2 = x_1 - x_2, \qquad u_3 = x_1 - x_3, \qquad \ldots, \qquad u_n = x_1 - x_n.$$

On obtient donc toutes les intégrales en ajoutant à l'une d'elles une fonction quelconque de $u_2, u_3, \ldots, u_n$.

Enfin, la fonction F étant périodique, si $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une intégrale, la fonction $R(x_1+m_1a_1, x_2+m_2a_2, \ldots, x_n+m_na_n)$ est aussi une intégrale quels que soient les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

L'intégrale (4) nous montre qu'il existe des intégrales périodiques par rapport à $(n-1)$ quelconques des variables $x_1, \ldots, x_n$, puisqu'elle est elle-même périodique par rapport à $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Envisageons l'ensemble des intégrales continues périodiques en $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Soit R l'une d'elles et considérons la différence

$$(5) \qquad R(x_1+a_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H(u_2, u_3, \ldots, u_n);$$

le premier membre étant périodique en $x_2, x_3, \ldots, x_n$, il en résulte que la fonction H est périodique en $u_2, u_3, \ldots, u_n$, les périodes étant a_2,

$a_3, \ldots, a_n$. Posons

$$K = \frac{1}{a_2 a_3 \ldots a_n} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} \ldots \int_0^{a_n} H(u_2, u_3, \ldots, u_n)\, du_2\, du_3 \ldots du_n.$$

Je dis d'abord que la constante K est la même pour toutes les intégrales de l'espèce considérée; en effet, R_1 désignant une autre de ces intégrales, on aura

$$\begin{aligned}&[R_1(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_n)]\\ &\quad - [R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, \ldots, x_n)]\\ &= H_1(u_2, u_3, \ldots, u_n) - H(u_2, \ldots, u_n).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$G(u_2, u_3, \ldots, u_n) = R_1(x_1, \ldots, x_n) - R(x_1, \ldots, x_n),$$

la fonction G est périodique en $u_2, u_3, \ldots, u_n$, et l'on a de plus

$$G(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_n + a_1) - G(u_2, \ldots, u_n) = H_1 - H.$$

Or comme

$$\begin{aligned}&\int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} G(u_2 + a_1, \ldots, u_n + a_1)\, du_2 \ldots du_n\\ &\quad = \int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} G(u_2, \ldots, u_n)\, du_2 \ldots du_n,\end{aligned}$$

on en conclut

$$\int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} H_1\, du_2 \ldots du_n = \int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} H\, du_2 \ldots du_n,$$

ce qui démontre la proposition. Il est bien aisé d'établir que la constante K est aussi indépendante des $(n-1)$ variables vis-à-vis desquelles on considère les intégrales périodiques; c'est une constante attachée à la fonction F, donnée par la formule

$$K = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

c'est en quelque sorte la moyenne de la fonction F.

Il résulte de là que, *s'il existe des intégrales de l'équation* (1), *périodiques par rapport à toutes les variables, on a nécessairement* $K = 0$.

Cette condition est-elle suffisante? Nous allons montrer qu'il n'en est pas ainsi.

Supposons $K = 0$. A toute intégrale R, périodique en $x_2, x_3, \ldots, x_n$, correspond une fonction continue $H(u_2, \ldots, u_n)$, périodique en $u_2, \ldots, u_n$, définie par la relation (5); sa valeur absolue possède un maximum μ. Je dis que l'ensemble des nombres positifs μ a *zéro* comme limite inférieure.

Si $R(x_1, \ldots, x_n)$ est une intégrale de l'espèce considérée, la fonction

$$R_1 = R - G(u_2, u_3, \ldots, u_n),$$

où G est une fonction quelconque périodique en $u_2, u_3, \ldots, u_n$, est aussi de cette espèce, et l'on a

$$H_1 = H - [G(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_n + a_1) - G(u_2, u_3, \ldots, u_n)].$$

Or il est facile de voir que l'on pourra déterminer une fonction G de façon que

$$|H_1| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné quelconque.

En effet la fonction H étant continue, on pourra la représenter avec l'approximation (¹) donnée ε par une *suite finie* de Fourier de la forme

$$h(u_2, \ldots, u_n) = \sum A \cos 2\pi \left(\frac{m_2 u_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n u_n}{a_n} + B\right),$$

dans laquelle, puisque $K = 0$, la combinaison $m_2 = m_3 = \ldots = m_n = 0$ est exclue.

Choisissant alors pour $G(u_2, \ldots, u_n)$ la fonction

$$G = \sum \frac{A}{2 \sin \pi a_1 \left(\frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)} \sin 2\pi \left[\frac{m_2}{a_2}\left(u_2 - \frac{a_1}{2}\right) + \frac{m_3}{a_3}\left(u_3 - \frac{a_1}{2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{m_n}{a_n}\left(u_n - \frac{a_1}{2}\right) + B\right],$$

on aura

$$H_1 = H - h,$$

(¹) Approximation qui a lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux variables.

c'est-à-dire, pour toutes les valeurs des variables,

$$|H_1| < \varepsilon.$$

La fonction G est bien déterminée (¹) puisque les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes; mais le procédé ne s'applique qu'à une suite finie; en d'autres termes, si l'on considère une suite de suites finies de Fourier h_1, $h_2, \ldots, h_p, \ldots$ ayant pour limite la fonction H, les fonctions correspondantes $G_1, G_2, \ldots, G_p, \ldots$, déterminées de la façon précédente, n'ont pas nécessairement une fonction limite (²), de sorte qu'il peut parfaitement n'exister aucune fonction G vérifiant l'équation

$$(6) \qquad G(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_n + a_1) - G(u_2, \ldots, u_n) = H,$$

bien qu'on en puisse former qui la vérifient avec toute approximation donnée.

En définitive, *si* $K = 0$, *il existe des intégrales* $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *périodiques en* $x_2, x_3, \ldots, x_n$, *et telles que la différence*

$$R(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

soit, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *inférieure, en module, à tout nombre donné* ε; en un mot il y a des intégrales qui sont presque périodiques, s'approchant, pour ainsi dire, autant que l'on veut de fonctions périodiques, mais il ne s'ensuit pas qu'il existe des intégrales exactement périodiques (³); d'ailleurs le fait peut être

---

(¹) La fonction G satisfaisant ici à la condition

$$G(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_n + a_1) - G(u_2, u_3, \ldots, u_n) = h$$

n'est, en réalité, déterminée qu'à une constante près. En effet, si G′ est une autre fonction vérifiant la même relation, on voit que la différence G′ — G admet alors, en plus des périodes $(a_2, 0, \ldots, 0), (0, a_2, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, a_n)$, la période $(a_1, a_1, \ldots, a_1)$, ce qui, d'après la remarque de la page 49, exige que G′ — G soit une constante.

(²) Les constantes que l'on pourrait ajouter à $G_1, G_2, \ldots, G_p, \ldots$ ne peuvent, comme on le verrait aisément, modifier le caractère de cette suite dans le sens de la convergence.

(³) On verra plus loin (IIIe Partie) que, s'il n'existe pas d'intégrale périodique, aucune des intégrales n'est *bornée*, c'est-à-dire qu'en module toute intégrale dépasse tout nombre donné, et que, s'il y a une intégrale bornée, il existe une intégrale périodique.

inexact. On pourrait objecter que la fonction H figurant dans l'équation (6) n'est pas quelconque, puisqu'elle est de la forme indiquée par la formule (5) et que la nature de cette dernière pourrait peut-être assurer l'existence d'une fonction G vérifiant la relation (6). Il n'en est rien et l'on peut établir directement qu'il est des cas où l'équation (1), malgré l'hypothèse $K = 0$, n'a pas d'intégrales périodiques.

Supposons, en effet, qu'il existe une intégrale finie, périodique, $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; on établit sans peine les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n A_{m_1, m_2, \ldots, m_n} &= \int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\ldots\int_0^{a_n} F \cos 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n}\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= 2\pi\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)\int_0^{a_1}\ldots\int_0^{a_n} R \sin 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n}\right) dx_1 \ldots dx_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n B_{m_1, m_2, \ldots, m_n} &= \int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\ldots\int_0^{a_n} F \sin 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n}\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= -2\pi\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)\int_0^{a_1}\ldots\int_0^{a_n} R \cos 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n}\right) dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Or désignons par $|a_1 a_2 \ldots a_n| \times M$ le maximum de la valeur absolue de R; on en conclut, quels que soient les entiers $m_1, \ldots, m_n$,

$$|A_{m_1, \ldots, m_n}| < 2\pi\left|\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right| M,$$

$$|B_{m_1, \ldots, m_n}| < 2\pi\left|\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right| M;$$

ce sont là de nouvelles conditions nécessaires, qui peuvent parfaitement ne pas être satisfaites. En effet, bien que les périodes $a_1, \ldots, a_n$ soient indépendantes, les quantités $\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}$ peuvent devenir infiniment petites, et cela de bien des façons. On peut même dire qu'il existe des systèmes de périodes indépendantes telles que, pour une infinité d'entiers $m_1, \ldots, m_n$, la quantité $\left|\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right|$ devient plus petite que toute fonction de

la forme $\frac{1}{\theta(m_1, \ldots, m_n)}$, θ étant une fonction positive quelconque grandissant indéfiniment avec $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Pour traiter un exemple précis, considérons le cas de deux variables, et soit $\alpha = \frac{a}{b}$ un nombre incommensurable positif plus petit que l'unité $(b > a > 0)$.

Étant donné l'entier positif r quelconque, il existe des nombres incommensurables $\alpha < 1$ tels que, pour une infinité d'entiers positifs m, n, on ait [1]

$$\left|\frac{m}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n^{2r+1}}.$$

Comme $\alpha < 1$ on a $m < n$; cette inégalité entraîne les suivantes :

$$\left|\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right| < \frac{1}{an^{2r}} < \frac{2^r}{a(m^2+n^2)^r}. \tag{7}$$

Considérons maintenant la série

$$F(x, y) = \sum \frac{1}{(m^2+n^2)^\rho} \sin 2\pi \left(\frac{mx}{a} - \frac{ny}{b}\right),$$

dans laquelle m et n prennent toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. Cette série est absolument et uniformément convergente si $\rho > 1$; elle admet même des dérivées partielles développables jusqu'à l'ordre $2(\rho - 1)$. On a ici

$$K = 0$$

et

$$B_{m,n} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b F \sin 2\pi \left(\frac{mx}{a} - \frac{ny}{b}\right) dx\, dy = \frac{1}{(m^2+n^2)^\rho}.$$

S'il existait une intégrale finie périodique de l'équation

$$R'(x, y) = F(x, y),$$

on pourrait trouver un nombre fixe et positif M tel que l'on eût, *quels que*

---

(1) Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 28. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

soient les entiers m, n,

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^\rho} < M\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|.$$

Mais pour les entiers qui satisfont aux inégalités (7) cela entraînerait

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^\rho} < \frac{2^r M}{a(m^2+n^2)^r},$$

inégalité impossible pour tous ces mêmes entiers si $r > \rho$; or, à part la condition $\rho > 1$, les nombres positifs r et ρ sont arbitraires.

Il se présente donc, dans le cas des intégrales de fonctions périodiques de plusieurs variables, des difficultés particulières *tenant à la nature arithmétique des périodes*. Ces difficultés ne se rencontrent pas dans les intégrales de fonctions périodiques d'une variable, pour lesquelles la condition $K = 0$ est nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'intégrales périodiques.

Remarquons enfin que, dans le cas le plus général, si la fonction périodique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue, on pourra trouver des fonctions $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ différant de F de moins de ε, et admettant des intégrales périodiques, à condition, bien entendu, comme toujours, que les périodes soient indépendantes et que $K = 0$. Cela résulte du fait qu'on peut trouver une *suite finie* de la forme

$$F_1 = \sum A \cos 2\pi\left(\frac{m_1 x_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n x_n}{a_n} + D\right)$$

représentant F avec l'approximation ε, et qu'alors la fonction R définie par les formules (3) de la page 55 représente une intégrale périodique de F_1.

Il résulte de ce que nous avons dit sur les dérivées des fonctions périodiques que, si la fonction F admet une intégrale périodique R, les fonctions R et F ont toutes leurs périodes communes et ont le même ordre de réductibilité. Si F est irréductible, R est également irréductible. Deux intégrales périodiques ne diffèrent que par une constante.

Si $F - K$, K étant une constante, admet une intégrale périodique R, l'intégrale générale de la fonction F pourra se mettre sous la forme

$$Kx_1 + R(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \theta(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n);$$

la fonction périodique R, définie à une constante près, sera dite la *partie périodique de l'intégrale*. Il est manifeste que la fonction R et la fonction F ont le même ordre de réductibilité, et cela tient à cette propriété évidente, que les deux fonctions F et F — K ont les mêmes périodes.

Dans tous les cas, si $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une intégrale quelconque, on a évidemment

$$R(x, x, \ldots, x) = \int F(x, x, \ldots, x)\, dx + C.$$

Tout ce que nous avons dit sur les propriétés communes à une fonction périodique et à ses dérivées, nous pouvons le répéter sur les fonctions

$$\frac{F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \lim_{h=0} \frac{F(x_1 + k_1 h, x_2 + k_2 h, \ldots, x_n + k_n h) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h};$$

l'indépendance des périodes est alors remplacée par cette condition qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers de la forme

$$m_1 \frac{k_1}{a_1} + m_2 \frac{k_2}{a_2} + \ldots + m_n \frac{k_n}{a_n} = 0,$$

en supposant toutefois que les nombres $k_1, \ldots, k_n$ sont tous différents de 0.

Périodes des fonctions de variables imaginaires. — Les résultats que nous avons obtenus permettent d'établir facilement les théorèmes connus sur le nombre maximum des périodes que peuvent posséder les fonctions de variables imaginaires. Soit

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

une fonction de la variable imaginaire $z = x + iy$. $\omega = a + ib$ étant une période de $f(z)$, on a simultanément :

$$P(x + a, y + b) = P(x, y), \qquad Q(x + a, y + b) = Q(x, y).$$

Il résulte clairement de là que si l'une des fonctions P ou Q est irréductible, $f(z)$ ne peut admettre plus de deux périodes distinctes.

Supposons $f(z)$ analytique : on a alors

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

Or une fonction harmonique ne peut être réductible que si elle est fonction linéaire de x et y. Si l'on avait, en effet,

$$P = \varphi(\alpha x + \beta y),$$

on en déduirait

$$(\alpha^2 + \beta^2)\varphi''(\alpha x + \beta y) = 0$$

ou

$$\varphi'' = 0,$$

et, par suite,

$$P = \lambda x + \mu y + \nu, \qquad Q = -\mu x + \lambda y + \eta;$$

d'où enfin

$$f(z) = Az + B,$$

qui ne peut admettre de période que si $A = 0$.

Par conséquent si une fonction analytique n'est pas une constante elle ne peut admettre plus de deux périodes distinctes. Enfin les relations (1) montrent que toute période de l'une des fonctions P ou Q appartient nécessairement à l'autre. Toutes les propositions bien connues sur les périodes et les parallélogrammes fondamentaux s'en déduisent sans difficulté.

Dans le cas des fonctions analytiques de plusieurs variables imaginaires, les propositions générales sur les périodes s'obtiennent avec autant de facilité, et en particulier ce théorème, d'après lequel une fonction analytique de n variables ne peut admettre plus de $2n$ périodes distinctes.

FONCTIONS PÉRIODIQUES DÉFINIES SUR UN CHAMP DENSE.

Nous avons supposé jusqu'ici que les fonctions étudiées étaient définies pour toutes les valeurs réelles des variables. Or on peut étendre les résultats de notre théorie à des fonctions définies seulement en tous les points d'un ensemble donné.

Nous dirons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les éléments d'une période si l'on a

pour tous les points $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de l'ensemble

$$F(\xi_1 + \alpha_1, \xi_2 + \alpha_2, \ldots, \xi_n + \alpha_n) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Cette relation ne peut avoir un sens que si l'ensemble donné admet lui-même la période $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; en d'autres termes il faut que, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'ensemble, le point de coordonnées $\xi_1 + \alpha_1, \ldots, \xi_n + \alpha_n$, lui appartienne également.

Dans le cas le plus général, l'étude des périodes devient très compliquée, car, aux difficultés provenant de la nature des fonctions définies sur le champ donné, viennent s'ajouter celles qui tiennent à la nature même de l'ensemble sur lequel les fonctions sont définies. Aussi nous bornerons-nous au cas où les fonctions étudiées et le champ donné présentent simultanément les caractères suivants :

1° *L'ensemble des points* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *est dense.*

2° *Les fonctions* $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *sont continues* (voir p. 10) *sur cet ensemble.*

Voici maintenant comment on définira la réductibilité.

Nous dirons que la fonction $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est réductible, et se ramène à la fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ par les formes linéaires

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \lambda_1^1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n^1 \xi_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_p = \lambda_1^p \xi_1 + \ldots + \lambda_n^p \xi_n \end{array} \right\} \qquad p < n,$$

si

$$(2) \qquad F(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p),$$

chaque fois que l'on a pour deux points quelconques du champ donné A

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^1(\xi'_1 - \xi_1) + \lambda_2^1(\xi'_2 - \xi_2) + \ldots + \lambda_n^1(\xi'_n - \xi_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1^p(\xi'_1 - \xi_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n^p(\xi'_n - \xi_n) = 0. \end{array} \right.$$

Dans ce cas les formules (1) font correspondre au champ donné A un champ B dans l'espace à p dimensions, et le champ B est également dense.

A un même point $Q(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ du champ B, peuvent correspondre plusieurs et même une infinité de points $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ du champ A, mais en tous ces points, d'après les conditions (2) et (3), la fonction F a la même valeur qui définit ainsi sans ambiguïté la fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$. Si nous n'imposions aucune autre condition à la fonction Φ, la réductibilité ainsi comprise serait d'une étude difficile, et sans grand profit; elle dépendrait à la fois de la nature de la fonction $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et de celle du champ A. Il pourrait arriver en particulier, que toute fonction définie sur le champ A fût réductible. C'est ce qui arriverait, dans le cas de trois variables, par exemple, si le champ A était formé d'un ensemble dense de points tel que, sur chaque parallèle à Ox, il n'y ait qu'un point de l'ensemble. Aussi nous ne regarderons la *fonction* $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *comme véritablement réductible à la fonction* $\Phi(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ *que si cette dernière est continue sur le champ* B. *La définition de la réductibilité comprendra donc, outre les conditions* (2) *et* (3), *la continuité de la fonction obtenue par la réduction, sur le champ transformé du champ donné par les formules de substitution.*

Il est à peine utile de remarquer que si les formes linéaires (1) étaient dépendantes, c'est-à-dire si dans le tableau des λ, tous les déterminants d'ordre p étaient nuls, la fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ serait à son tour réductible.

La définition de la réductibilité bien comprise, les théorèmes fondamentaux que nous avons établis restent applicables, et en premier lieu le suivant :

Une fonction irréductible ne peut admettre de périodes infiniment petites. — On peut en effet reprendre point par point la démonstration de la page 19. S'il existe des périodes infiniment petites, on peut trouver une direction Δ qui possède les propriétés suivantes : soit P un point quelconque du champ donné A, si l'on prend sur la droite passant par P et parallèle à Δ un point quelconque P_1; il existe des points P' du champ A aussi rapprochés qu'on le veut de P_1 et tels que l'on ait constamment $F(P') = F(P)$. Si en particulier le point P_1 appartient au champ, on a nécessairement $F(P) = F(P_1)$ puisque par hypothèse la fonction F est continue sur A.

Faisons alors un changement d'axes de coordonnées, en prenant Oy_n

parallèle à Δ. Soient

$$(4)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \lambda_1^1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n^1 \xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_{n-1} = \lambda_1^{n-1} \xi_1 + \ldots + \lambda_n^{n-1} \xi_n, \\ \eta_n = \lambda_1^n \xi_1 + \ldots + \lambda_n^n \xi_n, \end{cases}$$

les formules de transformation. L'ensemble A se transforme en un ensemble A′ et la fonction $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en une fonction $\Phi(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n)$ continue sur l'ensemble A′. Or en tous les points de l'ensemble A′ qui sont sur une même parallèle à Oy_n la fonction Φ a la même valeur; c'est ce que nous exprimons en disant qu'elle ne dépend pas de η_n. Considérons alors le champ B dans un espace à $n-1$ dimensions dans lequel les coordonnées d'un point quelconque sont $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$. Il faut montrer que la fonction Φ est continue sur B. Soient en effet $\eta_1^0, \ldots, \eta_{n-1}^0$ les coordonnées d'un point donné dans ce champ. Il existe au moins un point P du champ A′, dont les $n-1$ premières coordonnées sont $\eta_1^0, \ldots, \eta_{n-1}^0$; soit η_n^0 la dernière. La fonction Φ étant continue sur le champ A′, on peut, étant donné ε, trouver un domaine D à n dimensions entourant P de façon que pour tout point P′ du champ, pris dans ce domaine, on ait

$$|\Phi(P') - \Phi(P)| < \varepsilon.$$

On pourra, par exemple, définir le domaine D par les inégalités

$$|\eta_1 - \eta_1^0| < \rho, \qquad |\eta_2 - \eta_2^0| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\eta_{n-1} - \eta_{n-1}^0| < \rho, \qquad |\eta_n - \eta_n^0| < \rho.$$

Ceci posé, soit ρ_1 un nombre quelconque inférieur à ρ, par exemple $\rho_1 = \frac{\rho}{2}$, et considérons un point quelconque du champ B, dont les coordonnées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ satisfont aux conditions

$$|\eta_1 - \eta_1^0| < \frac{\rho}{2}, \qquad \ldots, \qquad |\eta_{n-1} - \eta_{n-1}^0| < \frac{\rho}{2};$$

si P_1 désigne un point du champ A′ dont les coordonnées sont égales à $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n$, η_n seul pouvant être variable, il faut montrer que

$$|\Phi(P_1) - \Phi(P)| < \varepsilon,$$

quel que soit η_n.

Considérons en effet le point P_2 de coordonnées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n^0$ [1], il se trouve à l'intérieur du domaine D; d'autre part, on pourra trouver des points P' du champ A' aussi rapprochés qu'on le veut de P_2, par conséquent situés eux-mêmes dans D, et tels que

$$\Phi(P') = \Phi(P_1);$$

or comme l'on a

$$|\Phi(P') - \Phi(P)| < \varepsilon,$$

on en conclut bien

$$|\Phi(P_1) - \Phi(P)| < \varepsilon.$$

La fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *serait réductible, au sens que nous avons attaché à ce mot; si elle est irréductible, elle ne peut donc admettre des périodes infiniment petites.*

Cette proposition est fondamentale; elle permet d'étendre aux fonctions irréductibles toutes les propositions relatives aux fonctions irréductibles définies sur un champ continu. L'ensemble des périodes d'une fonction irréductible reste dénombrable; la définition des systèmes minima et toutes les propriétés qui s'y rattachent se conservent intégralement. Passant alors aux fonctions réductibles, on définira de la même façon les périodes propres, les périodes propres distinctes et les systèmes minima de périodes. Toute substitution linéaire transformera les périodes en périodes, mais ici une transformation linéaire jouira pour ainsi dire d'une double propriété : si ω est une période, elle appartient à la fois à l'ensemble sur lequel la fonction périodique est définie, et à la fonction elle-même; par la substitution linéaire, la période transformée appartiendra encore, d'une part à l'ensemble transformé de l'ensemble donné, d'autre part à la fonction transformée elle-même.

Notons toutefois une différence avec le cas des fonctions périodiques définies sur un champ continu. Si, dans ce cas, une fonction réductible possède toujours des périodes infiniment petites, il n'en est plus nécessairement de même pour les fonctions réductibles continues et définies sur un champ dense. Cette différence n'introduit aucune difficulté dans notre théorie qui

---

[1] Le point P_2 n'appartient pas nécessairement au champ A'.

repose uniquement sur cette propriété fondamentale qu'une fonction irréductible n'admet jamais de périodes infiniment petites.

Quant aux propriétés des fonctions entièrement périodiques à périodes indépendantes, étudiées pages 45 et suivantes, elles subsistent entièrement, si l'on suppose que le champ dense sur lequel nos fonctions sont définies comprend, en particulier, les points dont les coordonnées sont égales ($\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = x$).

Les champs denses que nous aurons à considérer dans la suite satisferont à la propriété suivante :

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les coordonnées d'un point quelconque du champ, le point de coordonnées $\xi_1 + h, \xi_2 + h, \ldots, \xi_n + h$ appartient au champ, quel que soit h.

Les propriétés étudiées pages 51-54 subsistent alors pour les fonctions périodiques à périodes indépendantes, définies et continues sur un tel champ, en particulier, la suivante :

Si la quantité

$$\frac{F(\xi_1 + h, \ldots, \xi_n + h) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{h}$$

a une limite pour $h = 0$, et si cette limite, que nous désignerons par $F'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, est continue sur le champ des variables, les deux fonctions $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $F'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ admettent les mêmes périodes.

DEUXIÈME PARTIE.

CORPS ET CHAMPS DE PÉRIODES.

CORPS DE PÉRIODES.

Définitions. — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres réels non nuls que j'appellerai des *périodes* pour justifier les définitions dont ces nombres seront l'objet. S'il n'existe entre ces nombres aucune relation linéaire à coefficients rationnels, de la forme

$$\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{a_n} = 0, \tag{1}$$

les μ n'étant pas nuls à la fois, les périodes considérées seront dites *rationnellement indépendantes* ou, plus brièvement, *indépendantes*. C'est là une propriété dont nous avons déjà reconnu l'importance, et que nous allons retrouver dans un ordre d'idées différent. Il est clair que, dans la relation (1), on peut toujours supposer les coefficients μ entiers.

S'il existe entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une relation de la forme (1), ces périodes seront dites *dépendantes*.

Il est évident que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dépendantes ou indépendantes, les périodes $m_1 a_1, m_2 a_2, \ldots, m_n a_n$, où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désignent des nombres rationnels quelconques, mais non nuls, sont également dépendantes ou indépendantes.

S'il n'y a que deux périodes, l'indépendance exprime simplement que le rapport de ces périodes est incommensurable.

Si n périodes sont indépendantes, p quelconques d'entre elles sont toujours indépendantes; en particulier, le rapport de deux quelconques d'entre elles est nécessairement incommensurable.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des périodes indépendantes, nous dirons qu'une période a appartient *au corps* de ces périodes s'il existe entre le nombre a

et les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une relation de la forme

$$\frac{m}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

$m, m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des nombres rationnels et, si l'on veut, des entiers.

L'ensemble des périodes a, ainsi définies, constituera ce que j'appellerai un *corps de périodes*. Il est formé, on le voit, de l'ensemble des périodes qui ne sont pas indépendantes avec $a_1, a_2, \ldots, a_n$. L'entier positif n est l'*ordre* du corps ainsi défini.

Si a est un élément du corps P, défini par les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il est clair que $\frac{pa}{q}$ (p, q entiers) est aussi un élément de ce corps.

Si $a, a', a'', \ldots$ sont des éléments quelconques du corps P, tout élément b s'exprimant au moyen de $a, a', a'', \ldots$ par une formule à coefficients rationnels de la forme

$$\frac{1}{b} = \frac{r}{a} + \frac{r'}{a'} + \frac{r''}{a''} + \ldots$$

appartient aussi au corps P.

Si a, a' sont deux périodes du corps P

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{a_n} \\ \frac{1}{a'} &= \frac{\lambda'_1}{a_1} + \frac{\lambda'_1}{a_2} + \ldots + \frac{\lambda'_n}{a_n} \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \lambda' \text{ rationnels},$$

le rapport $\frac{a'}{a}$ ne peut être commensurable que si l'on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda'_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda'_2} = \ldots = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{a'}{a};$$

cela résulte immédiatement de l'indépendance des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

En particulier, tout élément du corps ne peut s'exprimer que d'une manière en fonction linéaire et rationnelle de $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ et, plus généralement, en fonction de $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant n périodes indépendantes choisies arbitrairement dans le corps.

Ordre d'un corps de périodes défini par n périodes quelconques. — Soient maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n périodes quelconques indépendantes ou non. Je dis qu'il existe un entier positif $p \leq n$ jouissant des propriétés suivantes : 1° Les nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ s'expriment linéairement et rationnellement au moyen de p nombres $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des périodes *indépendantes;* 2° Il est impossible d'exprimer les périodes a au moyen d'un nombre de périodes inférieur à p; 3° Cette opération peut s'effectuer d'une infinité de manières, mais si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ forment un deuxième système de périodes analogue à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, les corps de périodes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ sont identiques.

Supposons d'abord que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient des périodes indépendantes. Je dis qu'elles ne peuvent appartenir à un corps d'ordre inférieur à n. S'il en était autrement, en effet, il existerait des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p (p < n)$ permettant d'exprimer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par les formules

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} &= \frac{m_1^1}{\alpha_1} + \frac{m_2^1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p^1}{\alpha_p}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{1}{a_n} &= \frac{m_1^n}{\alpha_1} + \frac{m_2^n}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p^n}{\alpha_p},
\end{aligned}$$

où les coefficients m sont des nombres rationnels. Ces relations peuvent être considérées comme des équations par rapport aux inconnues $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ et, si n est supérieur à p, il existe *au moins* une relation linéaire homogène entre les nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, les coefficients n'étant pas nuls à la fois. D'autre part, ces coefficients sont proportionnels à certains déterminants du Tableau

$$\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^n & m_2^n & \ldots & m_p^n \end{vmatrix};$$

or ces déterminants sont rationnels. Les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne seraient pas indépendantes. p ne peut donc être inférieur à n.

Supposons maintenant que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient des périodes dépendantes.

Cela veut dire qu'elles sont liées par une ou plusieurs relations de dépendance. Écrivons ces relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{m_1^1}{a_1} + \dfrac{m_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{m_n^1}{a_n} = 0, \\ \dfrac{m_1^2}{a_1} + \dfrac{m_2^2}{a_2} + \ldots + \dfrac{m_n^2}{a_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{m_1^s}{a_1} + \dfrac{m_2^s}{a_2} + \ldots + \dfrac{m_n^s}{a_n} = 0. \end{cases}$$

Dans le Tableau des coefficients, cherchons le déterminant d'ordre le plus élevé qui soit différent de zéro, et soit q l'ordre de ce déterminant ($q \leqq n$) que nous supposerons être le suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_q^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^q & m_2^q & \ldots & m_q^q \end{vmatrix}.$$

La nullité de tous les déterminants d'ordre $q+1$ exprime que, parmi les relations (1), il y en a au plus q de distinctes. Elles sont équivalentes à un système résolu par rapport à $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_q}$,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta}{a_1} = \dfrac{\lambda_1^1}{a_{q+1}} + \dfrac{\lambda_2^1}{a_{q+2}} + \ldots + \dfrac{\lambda_{n-q}^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\Delta}{a_q} = \dfrac{\lambda_1^q}{a_{q+1}} + \dfrac{\lambda_2^q}{a_{q+2}} + \ldots + \dfrac{\lambda_{n-q}^q}{a_n}; \end{cases}$$

quant aux périodes $a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_n$, elles sont nécessairement indépendantes si l'on suppose que les relations (1) ou (2) représentent *toutes* les relations linéaires rationnelles et distinctes liant les nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

S'il existait, en effet, une relation de la forme

$$\frac{\lambda_1}{a_{q+1}} + \frac{\lambda_2}{a_{q+2}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-q}}{a_n} = 0,$$

elle serait, par hypothèse, une conséquence de (2) et, en exprimant que les

déterminants d'ordre $q+1$ sont nuls, on obtiendrait

$$\Delta^q \lambda_1 = 0, \qquad \Delta^q \lambda_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^q \lambda_{n-q} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-q} = 0.$$

Les formules (2) montrent donc que, quels que soient les nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, on peut toujours les exprimer linéairement et rationnellement au moyen d'un certain nombre $n-q$ d'entre eux. D'autre part, il est impossible de trouver des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ en nombre inférieur à $n-q$, et telles que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient des éléments du corps $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. En effet les $n-q$ périodes $a_{q+1}, \ldots, a_n$ étant indépendantes, on ne peut, ainsi qu'on l'a vu plus haut, exprimer $\frac{1}{a_{q+1}}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ linéairement et rationnellement en fonction de $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}$ si $r < n-q$.

Posons $p = n-q$; il est clair qu'on peut toujours exprimer $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ en fonction linéaire et rationnelle de p nombres $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$. Les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont alors nécessairement indépendantes et appartiennent au corps défini par $a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_n$; à part ces deux conditions elles sont d'ailleurs arbitraires. Si l'on a exprimé $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ de deux façons différentes, au moyen des deux systèmes de nombres

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}\right), \quad \left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_p}\right),$$

il est clair que les corps définis respectivement par les deux systèmes de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ sont identiques. En effet, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ s'expriment au moyen de $\frac{1}{a_{q+1}}, \frac{1}{a_{q+2}}, \ldots, \frac{1}{a_n}$; ces nombres s'exprimant à leur tour en fonction linéaire de $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_p}$, on voit finalement que $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ s'expriment linéairement et rationnellement en fonction de $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_p}$, et inversement.

En résumé, *n périodes étant données, il existe un nombre p, tel que ces périodes puissent être considérées comme des éléments d'un corps d'ordre p, et non comme des éléments d'un corps d'ordre inférieur à p; en un mot, ces n périodes définissent un corps d'ordre p bien déterminé.*

La recherche de l'ordre du corps défini par n périodes données est un problème d'arithmétique analogue à celui qui consiste à rechercher si le rapport de deux nombres est ou n'est pas commensurable. On peut dire, dans tous les cas, que si des périodes sont *dépendantes*, on peut s'en assurer par un nombre *fini* d'opérations arithmétiques, sans toutefois qu'il soit possible d'assigner une limite au nombre d'essais nécessaires à cette vérification. Au contraire, il est impossible, par un nombre fini d'opérations, de reconnaître si des périodes sont *indépendantes;* aussi loin qu'on ait poursuivi les opérations, quelque grand qu'en soit le nombre, si l'on n'a pas obtenu de résultat, on ne peut affirmer que les périodes sont indépendantes.

En réalité, on n'arriverait à la certitude que par une infinité dénombrable d'opérations. La certitude, si on l'acquiert au cours des opérations, ne peut se produire que dans le sens de la dépendance.

Corps commun à deux corps donnés. — Soient deux corps de périodes définis respectivement par les deux systèmes de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

Ces deux corps ont-ils des éléments communs? Si a est un tel élément, on a simultanément

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p}, \qquad \frac{1}{a} = \frac{n_1}{\beta_1} + \frac{n_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{n_q}{\beta_q};$$

c'est-à-dire

$$\frac{m_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p} = \frac{n_1}{\beta_1} + \ldots + \frac{n_q}{\beta_q};$$

ceci montre que le système des $p+q$ périodes α et β ne forme pas un système de périodes indépendantes; s'il en était autrement, les deux corps n'auraient aucun élément commun.

Supposons donc dépendantes les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, l'ensemble définissant un corps d'ordre ν; ν est au moins égal au plus grand

des nombres p et q. Soit $q < p$, $\nu = q + r$, et supposons indépendantes les périodes

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_r; \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_q.$$

Les périodes $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_p$ s'expriment alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_{r+1}} &= \frac{t_1^1}{\alpha_1} + \frac{t_2^1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{t_r^1}{\alpha_r} + \frac{s_1^1}{\beta_1} + \ldots + \frac{s_q^1}{\beta_q}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{1}{\alpha_p} &= \frac{t_1^{p-r}}{\alpha_1} + \frac{t_2^{p-r}}{\alpha_2} + \ldots + \frac{t_r^{p-r}}{\alpha_r} + \frac{s_1^{p-r}}{\beta_1} + \ldots + \frac{s_q^{p-r}}{\beta_q};
\end{aligned}$$

dans ces formules, les coefficients t et s sont des nombres rationnels. Soit a un élément commun aux deux corps

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p} = \frac{n_1}{\beta_1} + \frac{n_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{n_q}{\beta_q}.$$

Les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ étant par hypothèse indépendantes, on en conclut

$$\begin{aligned}
&m_1 + m_{r+1} t_1^1 + m_{r+2} t_1^2 + \ldots + m_p t_1^{p-r} = 0, \\
&m_2 + m_{r+1} t_2^1 + m_{r+2} t_2^2 + \ldots + m_p t_2^{p-r} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&m_r + m_{r+1} t_r^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_p t_r^{p-r} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_{r+1} s_1^1 + m_{r+2} s_1^2 + \ldots + m_p s_1^{p-r} = n_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&m_{r+1} s_q^1 + m_{r+2} s_q^2 + \ldots + m_p s_q^{p-r} = n_q.
\end{aligned}$$

Ces relations, considérées comme des équations par rapport aux inconnues $m_1, m_2, \ldots, m_p, n_1, n_2, \ldots, n_q$, sont résolues par rapport à $m_1, m_2, \ldots, m_r, n_1, n_2, \ldots, n_q$; les nombres $m_{r+1}, m_{r+2}, \ldots, m_p$ restent arbitraires. L'élément a est alors donné par la formule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} = \; & m_{r+1}\left(\frac{s_1^1}{\beta_1} + \frac{s_2^1}{\beta_2} + \ldots + \frac{s_q^1}{\beta_q}\right) \\
& + m_{r+2}\left(\frac{s_1^2}{\beta_1} + \frac{s_2^2}{\beta_2} + \ldots + \frac{s_q^2}{\beta_q}\right) + \ldots + m_p\left(\frac{s_1^{p-r}}{\beta_1} + \ldots + \frac{s_q^{p-r}}{\beta_q}\right);
\end{aligned}$$

c'est un élément quelconque du corps défini par les périodes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-r}$ où l'on a

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{s_1^1}{\beta_1} + \frac{s_2^1}{\beta_2} + \ldots + \frac{s_q^1}{\beta_q},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{\gamma_{p-r}} = \frac{s_1^{p-r}}{\beta_1} + \frac{s_2^{p-r}}{\beta_2} + \ldots + \frac{s_q^{p-r}}{\beta_q};$$

mais ces périodes ne sont pas nécessairement indépendantes.

Ainsi l'ensemble des éléments communs à deux corps donnés constitue lui-même un corps de périodes, dont l'ordre est au plus égal au plus grand des ordres p et q.

Il résulte de là que l'ensemble des éléments communs à plusieurs corps constitue lui-même un corps de périodes.

Au contraire, l'ensemble formé par *tous* les éléments appartenant à plusieurs corps de périodes (aux uns ou aux autres), ne constitue pas en général un corps de périodes; en d'autres termes, la somme de plusieurs corps ne forme pas un corps de périodes, c'est-à-dire n'est pas composée de *tous* les éléments d'un corps unique.

Les périodes appartenant à un même corps forment un ensemble dénombrable de nombres. L'ensemble des nombres limites est constitué par l'ensemble de tous les nombres réels.

L'ensemble formé par les éléments d'un corps de périodes est *condensé* dans tout intervalle, c'est-à-dire qu'il existe des éléments de l'ensemble dans tout intervalle donné, aussi petit soit-il.

Nous aurons souvent, parmi les périodes appartenant à un même corps, à faire des distinctions essentielles que nous allons indiquer.

CORPS RÉDUIT. BASES D'UN CORPS RÉDUIT. PÉRIODES PRIMITIVES.

Un corps d'ordre *un* par exemple est formé par une période a, et par toutes les périodes de la forme $\frac{p}{q}a$, $\frac{p}{q}$ étant un nombre rationnel quelconque.

Parmi toutes ces périodes, et une fois choisie la période a, on peut ne considérer que celles pour lesquelles $p = 1$, c'est-à-dire, en définitive, les sous-multiples de a.

C'est à ces sous-multiples que l'on est conduit dans le développement des fonctions périodiques en série de Fourier.

Soient de même un corps de périodes d'ordre p; $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *p périodes particulières, données et indépendantes, choisies dans ce corps*. Tout élément a du corps s'obtient par la formule

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_p}{a_p},$$

dans laquelle $m_1, \ldots, m_p$ désignent des nombres rationnels quelconques, positifs ou négatifs mais non nuls à la fois. Supposons qu'au lieu de considérer toutes les valeurs rationnelles des coefficients m, on se borne aux seules valeurs entières positives, négatives ou nulles. On obtient ainsi un ensemble de périodes que nous appellerons *corps réduit;* le groupe des p périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sera par définition une *base du corps réduit.*

Le corps réduit n'est donc défini qu'autant qu'on s'est donné la base $a_1, \ldots, a_p$, mais il est essentiel de remarquer qu'*à un même corps réduit correspond une infinité de bases différentes.*

Examinons, en effet, à quelles conditions les deux bases $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $b_1, b_2, \ldots, b_p$, fournissent le même corps réduit. Il est évident d'abord que chacune des périodes b doit appartenir au corps réduit défini par $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

On a donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{m_1^1}{a_1} + \dfrac{m_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{m_p^1}{a_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{b_p} = \dfrac{m_1^p}{a_1} + \dfrac{m_2^p}{a_2} + \ldots + \dfrac{m_p^p}{a_p}, \end{array} \right.$$

les coefficients m_i^j étant entiers. Inversement, $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_p}$ doivent être pour la même raison des fonctions linéaires à coefficients entiers de $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_p}$. Ceci exige que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & \ldots & m_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1^p & \ldots & \ldots & m_p^p \end{vmatrix}$$

soit entier, et de plus qu'il soit égal à ± 1.

En effet, les formules (1) peuvent être résolues par rapport à $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_p}$, et l'on a, en désignant par M_i^j le mineur de m_i^j dans Δ,

$$\frac{\Delta}{a_1} = \frac{M_1^1}{b_1} + \ldots + \frac{M_1^p}{b_p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\Delta}{a_p} = \frac{M_p^1}{b_1} + \ldots + \frac{M_p^p}{b_p}.$$

Il faut donc que le déterminant Δ divise tous ses mineurs M_i^j. Le déterminant adjoint formé avec les mineurs est alors divisible par Δ^p, d'autre part il est égal à Δ^{p-1}; le quotient $\frac{1}{\Delta}$ devant être entier, il suit de là que $\Delta = \pm 1$.

On trouve donc comme condition nécessaire celle que $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_p}$ s'expriment en fonctions linéaires, et à coefficients entiers, de $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_p}$, le déterminant des coefficients étant égal à ± 1.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si a est un élément du corps réduit défini par $a_1, a_2, \ldots, a_p$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_p}{a_p}\\ &= \frac{m_1 M_1^1 + \ldots + m_p M_p^1}{\Delta}\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{m_1 M_1^p + \ldots + m_p M_p^p}{\Delta}\frac{1}{b_p};\end{aligned}$$

puisque $\Delta = \pm 1$, ceci montre que a appartient au corps réduit défini par les périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$, et inversement. La démonstration nous indique le moyen d'obtenir tous les systèmes bases, ou bases d'un même corps réduit.

A un certain point de vue, les corps réduits d'ordre plus grand que *un*, ont des caractères que ne possèdent pas les corps d'ordre *un*. En effet, si a est la base d'un corps réduit d'ordre *un*, celui-ci se compose des périodes

$$a, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{a}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{a}{m}, \quad \ldots;$$

a est la seule période qui puisse être choisie comme base. Au contraire, dans un corps réduit d'ordre supérieur à *un*, il existe une infinité de bases.

Parmi toutes les périodes d'un corps réduit, certaines peuvent devenir

plus grandes que toute quantité donnée, d'autres peuvent au contraire devenir, en valeur absolue, inférieures à tout nombre donné. Dans l'un et l'autre cas, parmi les entiers m qui servent à définir la période a par la formule

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_p}{a_p},$$

un ou plusieurs d'entre eux grandissent indéfiniment; si un seul grandit indéfiniment, la période devient infiniment petite.

Enfin, parmi les périodes d'un corps réduit, nous ferons encore une classification importante. Nous distinguerons celles pour lesquelles les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, n'ont aucun diviseur commun [1], et nous les appellerons *les périodes primitives* du corps réduit. D'après cela le corps réduit se compose de l'ensemble des périodes primitives et de leurs sous-multiples.

Deux périodes primitives distinctes, si elles ne sont pas égales et de signes contraires, sont toujours incommensurables.

Il est essentiel de remarquer que la définition des périodes primitives ne dépend nullement de la base qui sert à définir le corps réduit. En d'autres termes, si a est une période primitive relativement à la base $a_1, a_2, \ldots, a_p$, a est encore période primitive dans la base $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

Écrivons, en effet,

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_p}{a_p},$$

$m_1, m_2, \ldots, m_p$ étant supposés n'avoir aucun diviseur commun. On a, d'autre part,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{\mu_1^1}{b_1} + \ldots + \frac{\mu_p^1}{b_p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{a_p} = \frac{\mu_1^p}{b_1} + \ldots + \frac{\mu_p^p}{b_p}$$

avec la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \ldots & \mu_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^p & \ldots & \mu_p^p \end{vmatrix} = \pm 1;$$

[1] Si les entiers m sont tous nuls, à l'exception d'un seul, celui-ci doit être égal à ± 1.

par suite,

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1\mu_1^1 + m_2\mu_1^2 + \ldots + m_p\mu_1^p}{b_1} + \frac{m_1\mu_2^1 + \ldots + \mu_p\mu_2^p}{b_2} + \ldots + \frac{m_1\mu_p^1 + \ldots + m_p\mu_p^p}{b_p},$$

et il s'agit de montrer que les coefficients entiers

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1\mu_1^1 + m_2\mu_1^2 + \ldots + m_p\mu_1^p, \\ M_2 &= m_1\mu_2^1 + m_2\mu_2^2 + \ldots + m_p\mu_2^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_p &= m_1\mu_p^1 + m_2\mu_p^2 + \ldots + m_p\mu_p^p \end{aligned}$$

n'ont aucun diviseur commun. Pour le voir il suffit de résoudre ces équations par rapport à $m_1, m_2, \ldots, m_p$; on en tirera (au signe près puisque $\Delta = \pm 1$)

$$\begin{aligned} m_1 &= \Delta_1^1 M_1 + \ldots + \Delta_p^1 M_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_p &= \Delta_1^p M_1 + \ldots + \Delta_p^p M_p, \end{aligned}$$

Δ_i^j désignant le mineur relatif à μ_i^j dans le déterminant Δ. Il résulte de là que si $M_1, M_2, \ldots, M_p$ avaient un diviseur commun, ce diviseur appartiendrait à chacun des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, nombres qui, par hypothèse, sont premiers entre eux.

L'ensemble des périodes primitives est donc parfaitement défini. C'est un ensemble naturellement dénombrable, dont les éléments peuvent être rangés, si l'on veut, dans une suite simplement infinie, et cela d'une infinité de manières. On pourrait, par exemple, procéder comme il suit :

Choisissons une base de périodes, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et considérons toutes les périodes primitives pour lesquelles les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont en valeur absolue inférieurs à un entier donné M_1; ces périodes sont en nombre fini; écrivons-les dans un ordre quelconque

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{\alpha_1}.$$

Considérons ensuite toutes les périodes primitives dont les entiers correspondants $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont, en valeur absolue, inférieurs à un second entier $M_2 > M_1$. Ces périodes comprennent les périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\alpha_1}$ et un nombre fini de nouvelles périodes $\omega_{\alpha_1+1}, \ldots, \omega_{\alpha_2}$, que nous rangerons à la suite de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\alpha_1}$. En continuant ainsi nous formerons une suite

illimitée

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_m, \quad \ldots,$$

qui comprend toutes les périodes primitives. D'autre part, lorsque le rang m croît indéfiniment, la période correspondante devient ou infiniment grande, ou infiniment petite.

Une telle suite peut être obtenue d'une infinité de manières, soit avec la même base $a_1, a_2, \ldots, a_p$, soit avec une base différente $b_1, b_2, \ldots, b_p$, mais il est clair que, si l'on adopte la méthode précédente pour les former, deux suites quelconques diffèrent seulement par l'ordre des termes, en ce sens que, si l'on considère les m premiers termes de l'une, on peut trouver m', de façon que les m' premiers termes de l'autre contiennent les m termes de la première.

On peut donner à l'ensemble des périodes qui constituent un corps réduit une représentation géométrique simple. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ une base du corps réduit, et un système de coordonnées dans un espace à p dimensions. A la période a qui vérifie

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_p}{a_p}$$

faisons correspondre le point P dont les coordonnées sont les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Si $m_1, m_2, \ldots, m_p$ n'ont pas de diviseur commun, on obtient ainsi une période primitive. Toutes les périodes qui sont des sous-multiples d'une même période primitive ont leurs points représentatifs en ligne droite, le plus rapproché de l'origine correspondant à la période primitive. Les périodes dont les points représentatifs s'éloignent indéfiniment de l'origine sont ou infiniment grandes, ou infiniment petites. Si l'on partait d'une autre base $b_1, b_2, \ldots, b_p$, on aurait, dans un autre système de coordonnées, une représentation analogue des périodes; à la même période a correspondraient d'autres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$, mais entre les deux systèmes d'entiers $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$, $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, correspondant à la même période, on aurait des relations de la forme

$$\begin{aligned}
m_1 &= \mu_1^1 n_1 + \mu_1^2 n_2 + \ldots + \mu_1^p n_p, \\
m_2 &= \mu_2^1 n_1 + \mu_2^2 n_2 + \ldots + \mu_2^p n_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
m_p &= \mu_p^1 n_1 + \mu_p^2 n_2 + \ldots + \mu_p^p n_p,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{vmatrix} \mu_1^1 & \dots & \mu_1^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_p^1 & \dots & \mu_p^p \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Ces relations, dans lesquelles les coefficients μ sont entiers, résultent immédiatement de celles qui lient les termes des deux bases de périodes.

Si l'on considère tous les points du premier système contenus à l'intérieur d'un certain domaine Γ, il leur correspond dans le second système des points contenus dans un autre domaine Γ'. Si le domaine Γ grandit indéfiniment en s'éloignant dans tous les sens de l'origine, le domaine Γ' s'éloigne aussi dans tous les sens de la seconde origine. Les formules qui lient les entiers m et n montrent en effet que, si parmi les coefficients m il y en a au moins un qui grandit indéfiniment, il y a au moins un coefficient n qui grandit indéfiniment, et inversement; géométriquement, à tout point du premier système qui s'éloigne indéfiniment correspond un point du second système qui s'éloigne aussi indéfiniment.

CHAMPS DE PÉRIODES.

Nous sommes dans la nécessité d'introduire encore une série de définitions indispensables, car nous aurons à considérer à chaque pas, soit les objets qu'elles représentent, soit les propriétés qu'elles expriment.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$, n périodes données, indépendantes ou non, E un ensemble quelconque de valeurs d'une variable réelle ξ. Considérons dans l'espace à n dimensions l'ensemble des points dont les coordonnées ξ_1, $\xi_2, \dots, \xi_n$ sont données par les formules

$$\xi_1 = \xi + m_1 a_1, \qquad \xi_2 = \xi + m_2 a_2, \qquad \xi_n = \xi + m_n a_n,$$

ξ appartenant à l'ensemble E, et $m_1, m_2, \dots, m_n$ prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. L'ensemble des points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ définit le *champ absolu* [1] relatif à l'ensemble des valeurs E.

---

[1] M. Bohl, dans un travail déjà cité, donne des définitions à peu près analogues, sous le nom de *classe, points de première catégorie,* etc.

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est un point du champ absolu, le nombre ξ s'appellera la *valeur congrue* à cet élément.

A tout élément P du champ absolu ne correspond qu'une seule valeur congrue, si toutefois parmi les périodes considérées il y en a au moins *deux* d'indépendantes. En effet, si ξ' était congru au même élément P, on aurait, en désignant par $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ les entiers correspondants,

$$(m'_1 - m_1)a_1 = (m'_2 - m_2)a_2 = \ldots = (m'_n - m_n)a_n = \xi - \xi';$$

s'il y a au moins deux périodes indépendantes, a_1 et a_2 par exemple, on en conclut $m'_1 - m_1 = 0$, $m'_2 - m_2 = 0$ et, par suite, $\xi = \xi'$.

Si ξ est une valeur quelconque de l'ensemble E, le point de coordonnées égales $P(\xi, \xi, \ldots, \xi)$ appartient évidemment au champ absolu, et ξ est la valeur congrue correspondante.

Considérons maintenant le cas, et *dans la suite nous nous placerons toujours dans cette hypothèse* (à moins d'indication contraire) où *l'ensemble* E *est formé de toutes les valeurs réelles de* ξ *comprises entre* $-\infty$ *et* $+\infty$.

Si $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est un élément du champ absolu, tous les points de coordonnées $\xi_1 + \lambda, \xi_2 + \lambda, \ldots, \xi_n + \lambda$ appartiennent aussi au champ absolu; ces points sont situés sur une même ligne droite, que nous appellerons une *caractéristique* du champ absolu.

Les caractéristiques ont une signification géométrique très simple. Soit, dans l'espace à n dimensions, le domaine parallélépipédique formé au moyen des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ portés à partir de l'origine sur chacun des axes de coordonnées, et considérons le réseau de parallélépipèdes obtenu avec ce parallélépipède fondamental. La droite

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

rencontre certains de ces parallélépipèdes qui découpent sur elle des segments de droite. Considérons les segments homologues dans le parallélépipède fondamental, et plus généralement dans tout parallélépipède du réseau; en prolongeant indéfiniment ces segments de droites, nous obtenons un ensemble dénombrable de droites qui sont précisément les caractéristiques.

Le champ absolu est donc un ensemble de points bien déterminés, se composant de tous les points des diverses caractéristiques. Lorsqu'on se déplace d'une façon continue sur l'une d'elles, le nombre congru correspondant varie d'une manière continue; mais en deux points voisins du champ absolu qui ne sont pas sur une même caractéristique, les nombres congrus correspondants n'ont pas nécessairement des valeurs voisines.

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ définissent un élément du champ absolu, le point de coordonnées $\xi_1 + m_1 a_1, \xi_2 + m_2 a_2, \ldots, \xi_n + m_n a_n$ appartient au même champ, quels que soient les entiers m; les divers points ainsi obtenus ayant d'ailleurs même nombre congru. *Le champ absolu est donc un ensemble périodique;* il sera complètement déterminé lorsqu'il sera connu dans le domaine parallélépipédique

$$0 \leq \xi_1 < a_1, \qquad 0 \leq \xi_2 < a_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leq \xi_n < a_n.$$

La définition la plus générale que nous venons de donner du champ absolu n'exclut pas le cas où plusieurs des périodes $a_1, \ldots, a_n$ seraient nulles; mais ce cas ne présente en réalité que fort peu d'intérêt.

Nous allons étudier maintenant, d'une manière plus complète, la nature du champ absolu, en considérant son dérivé, c'est-à-dire l'ensemble formé par les points limites, et nous appellerons cet ensemble le *champ total.*

Quelle est la nature du champ total? c'est la première question qu'il importe de résoudre, en commençant par le cas le plus simple, celui où les périodes données $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, ce qui, bien entendu, les suppose différentes de 0.

Champ total défini par un système de périodes indépendantes. — Nous allons démontrer que *si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des périodes indépendantes, le champ total se compose de tous les points de l'espace à p dimensions.*

Je m'appuierai pour cela sur le théorème suivant :

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant des valeurs arbitrairement choisies, on peut trouver des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ et des nombres x, de façon que les quan-

tités

$$(1) \qquad x + m_1 a_1 - x_1, \quad x + m_2 a_2 - x_2, \quad \ldots, \quad x + m_p a_p - x_p$$

soient en valeur absolue inférieures à tout nombre donné ε.

J'avais obtenu ce dernier théorème en montrant que s'il est vrai pour $p-1$ variables il est vrai pour p, lorsque j'appris que M. Bohl l'avait déjà établi dans son intéressant travail [1] sur les séries trigonométriques avec plusieurs arguments proportionnels. M. Bohl déclare ignorer lui-même si ce théorème est absolument nouveau; il est à noter, en effet, qu'on peut le rencontrer, sous des formes plus ou moins variées, dans des recherches d'ordres très différents. Je ne reproduirai pas ici la démonstration complète de M. Bohl, me bornant seulement à en indiquer la méthode et renvoyant pour plus de détails au Mémoire déjà cité.

M. Bohl démontre que si $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des nombres quelconques, différents de 0, entre les inverses desquels n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients rationnels, on peut trouver des entiers $m, m_1, m_2, \ldots, m_p$ tels que les différences

$$(2) \qquad m\alpha + m_1 a_1 - x_1, \quad m\alpha + m_2 a_2 - x_2, \quad \ldots, \quad m\alpha + m_p a_p - x_p,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont arbitrairement donnés, soient inférieures en module à tout nombre positif donné ε. Considérons alors les périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et l'ensemble des nombres a [2] donnés par la formule

$$\frac{1}{a} = \frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_p}{a_p},$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ prennent toutes les valeurs rationnelles possibles. C'est un ensemble dénombrable; il existe donc dans tout intervalle des nombres α n'appartenant pas à cet ensemble. Si α est l'un d'eux on pourra, étant donnés $x_1, x_2, \ldots, x_p$, choisir les entiers $m, m_1, \ldots, m_p$ de façon que les

---

(1) Piers Bohl, *Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten*, p. 4. Dorpat, 1893.

(2) C'est-à-dire les éléments du corps défini par $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

quantités (2) soient aussi petites que l'on veut, et en posant $m\alpha = x$ nous obtenons le théorème en question. On remarquera que parmi les nombres x permettant de rendre infiniment petites les quantités (1) il y a des multiples entiers de n'importe quel nombre non nul à condition que celui-ci n'appartienne pas au corps des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Nous pouvons maintenant interpréter facilement ce théorème. Si l'on pose

$$x + m_1 a_1 = \xi_1, \qquad x + m_2 a_2 = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad x + m_p a_p = \xi_p,$$

les quantités (1) s'écrivent alors

$$\xi_1 - x_1, \quad \xi_2 - x_2, \quad \ldots, \quad \xi_p - x_p;$$

comme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ sont les coordonnées d'un point du champ absolu, on peut donc dire que, étant donné un point quelconque P de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$, il existe des points du champ absolu aussi voisins qu'on le veut du point P. En d'autres termes *l'ensemble dérivé du champ absolu se compose de tous les points de l'espace; le champ absolu constitue un ensemble dense dans tout domaine à p dimensions,* ou enfin l'ensemble des caractéristiques du champ absolu est un ensemble dense.

Étant donné ε, considérons tous les nombres x qui, avec un choix convenable d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, permettent d'écrire les inégalités

$$(3) \qquad |x + m_1 a_1 - x_1| \leqq \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |x + m_p a_p - x_p| \leqq \varepsilon.$$

Il n'est pas difficile de se représenter la nature de l'ensemble des valeurs x ainsi caractérisées. A tout nombre x de l'ensemble correspond un point du champ absolu dont les coordonnées satisfont aux inégalités

$$(4) \qquad |\xi_1 - x_1| \leqq \varepsilon, \qquad |\xi_2 - x_2| \leqq \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\xi_p - x_p| \leqq \varepsilon,$$

et inversement. Or tous les points du champ absolu satisfaisant à ces conditions sont contenus dans un certain domaine D entourant le point $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, domaine très petit défini par les inégalités (4). Soit C une caractéristique rencontrant ce domaine, qu'elle coupe en deux points N et N′ distants de moins de 2ε. Au segment NN′ correspondent des valeurs congrues x comprises dans un intervalle très petit nn'. A chaque caractéristique coupant le domaine D correspond ainsi un intervalle nn' pour les

valeurs x, et un système d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ restant le même pour toutes les valeurs x de cet intervalle. L'ensemble des nombres x est donc constitué par les valeurs appartenant à une infinité dénombrable d'intervalles moindres que 2ε. Si ε est assez petit, ces intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres. Il suffit, pour l'établir, de montrer qu'à deux points du champ absolu compris dans D et situés sur deux caractéristiques distinctes correspondent des valeurs congrues distinctes. Soient, en effet, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p)$ ces deux points; x, x' les valeurs congrues correspondantes; on a respectivement pour certaines valeurs des m, m'

$$\left.\begin{array}{l} x + m_i a_i = \xi_i \\ x' + m'_i a_i = \xi'_i \end{array}\right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, p;$$

les caractéristiques étant distinctes, les entiers $m'_i - m_i$ ne sont pas tous nuls; si par exemple $m'_i - m_i \neq 0$, on a

$$x' - x = \xi'_i - \xi_i + (m_i - m'_i) a_i,$$

c'est-à-dire

$$|x' - x| > |(m_i - m'_i) a_i| - |\xi'_i - \xi_i| > |a_i| - 2\varepsilon;$$

par conséquent, si ε est assez petit, les intervalles auxquels appartiennent respectivement x et x' n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Si maintenant l'on faisait diminuer ε, certains [1] des intervalles nn' disparaîtraient, les autres diminuant seulement d'étendue; mais il n'y a pas d'intervalles limites lorsque ε tend vers 0; tous les intervalles s'élimineraient successivement à mesure que ε deviendrait de plus en plus petit, si toute fois le point $P(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas un point du champ absolu.

Parmi les points du champ limite, ou champ total, on pourrait faire encore de nouvelles distinctions. Reprenons, en effet, l'ensemble des nombres x dont il vient d'être question et correspondant à la valeur ε. Parmi ces nombres, il y en a toujours une infinité dénombrable pour lesquels l'une des quantités $x + m_i a_i - x_i$ est exactement égale à 0, et cela quel que soit ε. Il suffit pour s'en rendre compte de remarquer que le plan $X_i - x_i = 0$ coupe, à l'intérieur du domaine D, une infinité dénombrable de caractéris-

[1] Une infinité dénombrable.

tiques. Mais il n'existe pas en général de nombres x pour lesquels deux des quantités $x + m_i a_i - x_i$ soient nulles; les points du champ total pour lesquels il en est ainsi constituent un nouvel ensemble dans ce champ; les points du champ total pour lesquels trois des quantités $x + m_i a_i - x_i$ pourraient devenir nulles, pour des valeurs convenables de x et des m_i, formeraient un troisième ensemble, et ainsi de suite, ... les points pour lesquels toutes les quantités $x + m_i a_i - x_i$ pourraient devenir nulles constituant enfin le champ absolu. Ces classifications n'ont en réalité aucun intérêt, et je les laisserai complètement de côté.

On remarquera que nous écartons également le cas où $p = 1$, c'est-à-dire celui où il y aurait une seule période. Le champ absolu comprendrait alors toutes les valeurs réelles, mais à un point de ce champ correspondrait une infinité de valeurs congrues.

Champ total défini par un système de périodes dépendantes. — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des périodes que nous supposons dépendantes, mais différentes de o. Parmi ces périodes il y en a un certain nombre d'indépendantes; soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Les périodes $a_{p+1}, \ldots, a_n$ vérifient alors des relations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{q_1}{a_{p+1}} = \dfrac{r_1^1}{a_1} + \dfrac{r_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{r_p^1}{a_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{q_{n-p}}{a_n} = \dfrac{r_1^{n-p}}{a_1} + \dfrac{r_2^{n-p}}{a_2} + \ldots + \dfrac{r_p^{n-p}}{a_p}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles les coefficients r et q sont entiers, les coefficients $q_i, r_1^i, \ldots, r_p^i$ d'une même ligne pouvant être supposés premiers entre eux.

Voyons d'abord à quelles relations satisfont les coordonnées des points du champ absolu. Soit $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un point de ce champ; on a pour une certaine valeur ξ, et avec un choix convenable d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$,

$$\xi + m_1 a_1 = \xi_1, \qquad \ldots, \qquad \xi + m_p a_p = \xi_p, \qquad \ldots, \qquad \xi + m_n a_n = \xi_n,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\xi}{a_1} = \frac{\xi_1}{a_1} - m_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\xi}{a_n} = \frac{\xi_n}{a_n} - m_n;$$

en multipliant les $p+1$ premières de ces relations, respectivement par $r_1^1, r_2^1, \ldots, r_p^1, -q_1$, ajoutant et tenant compte de la première des relations (1), on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
q_1 \dfrac{\xi_{p+1}}{a_{p+1}} - \left(r_1^1 \dfrac{\xi_1}{a_1} + r_2^1 \dfrac{\xi_2}{a_2} + \ldots + r_p^1 \dfrac{\xi_p}{a_p}\right) = q_1 m_{p+1} - (m_1 r_1^1 + \ldots + m_p r_p^1) = \mathrm{M}_1, \\
q_2 \dfrac{\xi_{p+2}}{a_{p+2}} - \left(r_1^2 \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + r_p^2 \dfrac{\xi_p}{a_p}\right) = q_2 m_{p+2} - (m_1 r_1^2 + \ldots + m_p r_p^2) = \mathrm{M}_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
q_{n-p} \dfrac{\xi_n}{a_n} - \left(r_1^{n-p} \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + r_p^{n-p} \dfrac{\xi_p}{a_p}\right) = q_{n-p} m_n - (m_1 r_1^{n-p} + \ldots + m_p r_p^{n-p}) = \mathrm{M}_{n-p}.
\end{array}\right.$$

Nous allons montrer que les coordonnées des points du champ total satisfont à des relations de la même forme.

Soit, en effet, $\mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point du champ total, il existe des nombres x et des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, tels que les quantités

$$x + m_1 a_1 - x_1 = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad x + m_n a_n - x_n = \alpha_n$$

soient, en module, inférieures à tout nombre donné. On tire de là :

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x_1}{a_1} - m_1 + \frac{\alpha_1}{a_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{x}{a_n} = \frac{x_n}{a_n} - m_n + \alpha_n,$$

ou, en faisant les mêmes combinaisons que précédemment et tenant compte des relations (1),

$$\begin{aligned}
&q_1 \frac{x_{p+1}}{a_{p+1}} - \left(r_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^1 \frac{x_p}{a_p}\right) + (m_2 r_1^1 + \ldots + m_p r_p^1 - m_{p+1} q_1) \\
&\quad = \alpha_1 \frac{r_1^1}{a_1} + \ldots + \alpha_p \frac{r_p^1}{a_p} - q_1 \frac{\alpha_{p+1}}{a_{p+1}}.
\end{aligned}$$

Le premier membre de cette relation est la somme d'un nombre fixe et d'un entier positif ou négatif, le second membre est infiniment petit. Or le premier membre ne pourra être rendu infiniment petit que si le nombre fixe

$$q_1 \frac{x_{p+1}}{a_{p+1}} - \left(r_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^1 \frac{x_p}{a_p}\right)$$

est un entier, et un entier de la forme

$$\mathrm{M}_1 = m_{p+1} q_1 - (m_1 r_1^1 + m_2 r_2^1 + \ldots + m_p r_p^1).$$

Pour que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent être les coordonnées d'un point du champ total, il doit donc exister des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, tels que l'on ait

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} q_1 \dfrac{x_{p+1}}{a_{p+1}} - \left(r_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^1 \dfrac{x_p}{a_p}\right) = q_1 m_{p+1} - (m_1 r_1^1 + \ldots + m_p r_p^1) = \mathrm{M}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_{n-p} \dfrac{x_n}{a_n} - \left(r_1^{n-p} \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^{n-p} \dfrac{x_p}{a_p}\right) = q_{n-p} m_n - (m_1 r_1^{n-p} + \ldots + m_p r_p^{n+p}) = \mathrm{M}_{n-p}; \end{array}\right.$$

c'est là une condition nécessaire; nous montrerons dans un instant qu'elle est suffisante. Auparavant examinons d'un peu plus près cette condition. Les premiers membres de (3) doivent être égaux à des entiers $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_{n-p}$, mais ces entiers ne sont pas en général quelconques : il faut que les équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} q_1 m_{p+1} - m_1 r_1^1 - m_2 r_2^1 - \ldots - m_p r_p^1 = \mathrm{M}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_{n-p} m_n - m_1 r_1^{n-p} - \ldots\ldots\ldots\ldots - m_p r_p^{n-p} = \mathrm{M}_{n-p} \end{array}\right.$$

aient des solutions entières en $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots, m_n$. Il en serait toujours ainsi si les entiers $q_1, q_2, \ldots, q_{n-p}$ étaient égaux à l'unité. Sinon nous remarquerons que les équations (4), privées de leurs seconds membres, sont algébriquement indépendantes, puisqu'elles sont résolues par rapport aux variables $m_{p+1}, \ldots, m_n$. Pour reconnaître, étant donnés $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_{n-p}$, si elles ont des solutions entières, il suffit de s'appuyer sur un théorème établi par M. Méray [1], dont je rappellerai l'énoncé :

Pour que les équations algébriquement indépendantes, à coefficients entiers

$$\begin{array}{l} \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \ldots + \alpha_n^1 x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1^p x_1 + \alpha_2^p x_2 + \ldots + \alpha_n^p x_n = \beta_n, \end{array}$$

admettent des solutions entières, il faut et il suffit que les déterminants

---

(1) Méray, *Solution du problème général de l'Analyse indéterminée* (*Annales de l'École Normale*, t. XII, 1883).

d'ordre p formés avec les éléments du Tableau

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^p & \alpha_2^p & \dots & \alpha_n^p \end{matrix} \right\|$$

aient pour plus grand diviseur un nombre d divisant tous les déterminants obtenus en remplaçant dans les premiers une colonne quelconque par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$.

On pourrait donc par un nombre limité d'opérations arithmétiques reconnaître si les entiers $M_1, M_2, \dots, M_{n-p}$ permettent la résolution en nombres entiers des équations (4).

Démontrons maintenant que les conditions trouvées sont suffisantes et que si elles sont vérifiées le point $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un point limite.

Par hypothèse il existe des entiers déterminés $m_1, \dots, m_n$ satisfaisant aux relations (3). Plaçons-nous tout d'abord dans le cas particulier où les seconds membres des relations (3) sont nuls ($M_1 = M_2 = \dots = M_{n-p} = 0$), et remarquons que, les périodes $a_1, a_2, \dots, a_p$ étant indépendantes, les périodes $\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_p a_p$, où les λ sont des entiers quelconques non nuls, le sont également. On peut donc trouver des nombres x et des entiers $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$, de façon que $x + \mu_1(\lambda_1 a_1), \dots, x + \mu_p(\lambda_p a_p)$ soient aussi voisins qu'on le veut de $x_1, x_2, \dots, x_p$. En particulier, faisons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = q,$$

q étant un entier divisible par chacun des entiers $q_1, q_2, \dots, q_{n-p}$. Posons

$$x + \mu_1 q a_1 = x_1 + \alpha_1, \qquad \dots, \qquad x + \mu_p q a_p = x_p + \alpha_p$$

et

$$x + m'_{p+1} a_{p+1} = x_{p+1} + \alpha_{p+1}, \qquad \dots, \qquad x + m'_n a_n = x_n + \alpha_n,$$

les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ étant infiniment petites, et les entiers $m'_{p+1}, \dots, m'_n$ étant pour l'instant indéterminés. En éliminant x entre ces relations et les relations (1) existant entre les périodes, on obtient $m - p$ relations, telles que la suivante

$$\begin{aligned} & q_1 \frac{x_{p+1}}{a_{p+1}} - \left(r_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \dots + r_p^1 \frac{x_p}{a_p} \right) \\ & \quad = q_1 m'_{p+1} - q(\mu_1 r_1^1 + \dots + \mu_p r_p^1) + \alpha_1 \frac{r_1^1}{a_1} + \dots + \alpha_p \frac{r_p^1}{a_p} - \alpha_{p+1} \frac{q_1}{a_{p+1}}, \end{aligned}$$

ou, à cause des relations (3), dans lesquelles $M_1, M_2, \ldots, M_{n-p}$ sont nuls,

$$(5) \qquad q_1 m'_{p+1} - q(\mu_1 r_1^1 + \ldots + \mu_p r_p^1) = \alpha_{p+1}\frac{q_1}{a_{p+1}} - \left(\alpha_1 \frac{r_1^1}{a_1} + \ldots + \alpha_p \frac{r_p^1}{a_p}\right)$$

et $n - p - 1$ relations analogues.

Si nous choisissons

$$m'_{p+1} = \frac{q}{q_1}(\mu_1 r_1^1 + \ldots + \mu_p r_p^1),$$

$$m'_n = \frac{q}{q_{n-p}}(\mu_1 r_1^{n-p} + \ldots + \mu_p r_p^{n-p}),$$

les premiers membres des relations (5) devenant nuls, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant infiniment petits, il faut nécessairement que $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ soient eux-mêmes infiniment petits, et la proposition est établie dans ce cas; le point $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est bien un point limite du champ absolu.

Supposons maintenant que les entiers $M_1, M_2, \ldots, M_{n-p}$ ne soient pas nuls, mais soient de la forme (4). Alors, d'après la proposition qui vient d'être établie, le point Q de coordonnées $x_1 - m_1 a_1$, $x_2 - m_2 a_2$, ..., $x_n - m_n a_n$ est un point limite comme le champ absolu est un ensemble de points admettant les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il en résulte qu'il y a aussi des points du champ absolu, aussi voisins qu'on le veut du point $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et le théorème se trouve démontré dans le cas général. Les conditions (3) sont nécessaires et suffisantes.

On obtient donc tous les points du champ total en considérant les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} q_1 \dfrac{x_{p+1}}{a_{p+1}} = r_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^1 \dfrac{x_p}{a_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_{n-p}\dfrac{x_n}{a_n} = r_1^{n-p}\dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + r_p^{n-p}\dfrac{x_p}{a_p}, \end{array}\right.$$

et en ajoutant aux coordonnées de ces derniers respectivement, des multiples entiers quelconques de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les relations (6) se déduisent très simplement, comme on le voit, des relations (1) existant entre les périodes. Nous les appellerons les *formes adjointes* des relations entre les

périodes. On les obtient en remplaçant dans ces dernières les nombres $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ respectivement par les variables $\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}$ et ceci permet d'écrire les formes adjointes lorsque les relations existant entre les périodes ne sont pas mises sous la forme (1).

On voit finalement que, parmi les n coordonnées d'un point du champ total, il y en a p seulement d'entièrement arbitraires. L'ensemble des points définis par les formules (6) est formé de tous les points d'un espace à p dimensions compris dans l'espace à n dimensions, et le champ total se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles analogues [1]. Pour ces raisons nous appellerons *ordre d'un champ* le nombre des périodes qui sont indépendantes parmi celles qui servent à le définir.

Il nous reste encore quelques remarques importantes à faire.

1° Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point quelconque du champ total, il existe des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ satisfaisant aux relations (3); il en existe alors une infinité. Pour que $m'_1, m'_2, \ldots, m'_p, \ldots, m'_n$ soit un autre système d'entiers satisfaisant aux mêmes relations, il faut et il suffit en effet que l'on ait

$$(7)\quad \begin{cases} q_1 \quad (m'_{p+1} - m_{p+1}) = r_1^1 \quad (m'_1 - m_1) + r_2^1 (m'_2 - m_2) + \ldots + r_p^1 \quad (m'_p - m_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_{n-p}(m'_n \quad - m_n \quad) = r_1^{n-p}(m'_1 - m_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_p^{n-p}(m'_p - m_p). \end{cases}$$

Or ces équations ont toujours des solutions entières [2] par rapport aux inconnues $(m'_1 - m_1), \ldots, (m'_n - m_n)$. Chaque fois que, pour des valeurs convenables de x, les différences

$$x + m'_1 a_1 - x_1, \quad \ldots, \quad x + m'_n a_n - x_n$$

---

[1] Ces ensembles, qui sont des ensembles continus de points, sont distincts, c'est-à-dire n'ont aucun point commun. De plus, si l'on considère deux de ces ensembles, la distance de deux points quelconques pris respectivement dans chacun d'eux a un minimum différent de zéro.

[2] Les résultats énoncés dans le Mémoire déjà cité de M. Méray permettraient d'obtenir la forme générale de ces solutions entières, mais cette forme générale ne nous intéresse pas ici.

pourront être rendues assez petites, le système d'entiers $m'_1, \ldots, m'_n$ satisfera aux conditions (7).

Ici encore, comme dans le cas de périodes indépendantes, l'ensemble des valeurs x pour lesquelles on a, avec un choix convenable d'entiers $m_1, \ldots, m_n$,

$$|x + m_2 a_1 - x_1| \leqq \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |x + m_n a_n - x_n| \leqq \varepsilon$$

se compose de toutes les valeurs comprises dans une infinité dénombrable d'intervalles inférieurs à 2ε.

2° Considérons le cas particulier où les *entiers* $q_1, q_2, \ldots, q_{n-p}$ *sont tous égaux à* ± 1 $\left(\text{ce qui arriverait par exemple si, aux périodes } a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n, \text{ on substituait leurs sous-multiples } \frac{a_{p+1}}{q_1}, \ldots, \frac{a_n}{q_{n-p}}\right)$.

La restriction que l'on doit faire dans le cas général sur les entiers M_1, $M_2, \ldots, M_{n-p}$ disparaît; ces nombres peuvent être quelconques, car les équations (4) ont alors des solutions entières en $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots, m_n$ quels que soient $M_1, \ldots, M_{n-p}$.

Dans ce cas, *si l'on a déterminé des entiers* $m'_1, m'_2, \ldots, m'_p$ *et un nombre* x *de telle façon que les quantités*

$$(8) \qquad \alpha_1 = x + m'_1 a_1 - x_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = x + m'_p a_p - x_p$$

soient infiniment petites, on peut déterminer des entiers $m'_{p+1}, \ldots, m'_n$ *de façon que, pour la même valeur* x, *les quantités*

$$(9) \qquad \alpha_{p+1} = x + m'_{p+1} a_{p+1} - x_{p+1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = x + m'_n a_n - x_n$$

soient aussi infiniment petites. On peut écrire en effet

$$(10) \qquad \begin{aligned} & q_1(m'_{p+1} - m_{p+1}) - (m'_1 - m_1) r_1^1 - \ldots - (m'_p - m_p) r_p^1 \\ & = \alpha_{p+1} \frac{q_1}{a_{p+1}} - \alpha_1 \frac{r_1^1}{a_1} - \ldots - \alpha_p \frac{r_p^1}{a_p}; \end{aligned}$$

puisque $q_1 = 1$, on peut prendre

$$m'_{p+1} = m_{p+1} + (m'_1 - m_1) r_1^1 + \ldots + (m'_p - m_p) r_p^1;$$

le premier membre de (10) est alors nul; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant infiniment

petits, il en est de même de α_{p+1}. On arrivera à la même conclusion pour $\alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont nuls, $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ seront nuls, de sorte que, dans ce cas, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant un point quelconque du champ absolu défini par $a_1, \ldots, a_p$, ξ sa valeur congrue, en déterminant $x_{p+1}, \ldots, x_n$ par les formules (6) aux seconds membres desquelles on peut d'ailleurs ajouter des entiers quelconques, le point de coordonnées $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ devient un point du champ absolu défini par $a_1, \ldots, a_n$ et ξ sa valeur congrue. Nous aurons tout particulièrement à nous servir de cette remarque.

CHAMPS ÉQUIVALENTS, CHAMPS MULTIPLES D'UN CHAMP DONNÉ.

Définition. — Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_q)$ deux systèmes de périodes quelconques, A et B leurs champs absolus respectifs. Nous dirons que deux points P et Q pris respectivement dans les champs A et B sont *correspondants*, s'ils correspondent à la *même* valeur congrue ξ.

Ceci posé, *les champs* A *et* B *seront dits équivalents si,* P *et* Q *étant deux points correspondants donnés, mais quelconques, à tout point* P′ *du champ* A *voisin de* P, *on peut faire correspondre un point* Q′ (*correspondant de* P) *du champ* B *voisin du point* Q, *et inversement.* D'une façon précise, il faut qu'à tout domaine D entourant P on puisse faire correspondre un domaine Δ entourant Q, de façon que tout point du champ absolu A, pris dans D, ait un correspondant dans le champ B contenu dans Δ, et inversement.

Un point quelconque pris dans l'un des champs possède dans l'autre une infinité de correspondants; par exemple au point P de coordonnées

$$\xi_1 = \xi + m_1 a_1, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = \xi + m_n a_n$$

correspondent dans B tous les points de coordonnées

$$\eta_1 = \xi + n_1 b_1, \qquad \ldots, \qquad \eta_q = \xi + n_q b_q$$

où les entiers $n_1, \ldots, n_q$ sont arbitraires.

Il résulte de la définition même que deux champs équivalents à un troisième sont équivalents entre eux.

Champs équivalents de périodes indépendantes. — Soit A un champ défini par les p périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$; proposons-nous de déterminer tous les champs de périodes indépendantes qui lui sont équivalents.

Soit $b_1, b_2, \ldots, b_q$ un système de q périodes indépendantes dont je suppose le champ B, équivalent au champ A. Je vais montrer *que* $q = p$ *et que* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ *sont deux bases d'un même corps réduit* (*voir* p. 77) : *le corps réduit défini par* la base $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Montrons par exemple que b_1 appartient au corps des périodes a_1, $a_2, \ldots, a_p$. Soient P et Q deux points correspondants donnés dans les champs A et B,

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{P} & \xi + m_1 a_1 = \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi + m_p a_p = \xi_p, \\ \mathrm{Q} & \xi + n_1 b_1 = \eta_1, \quad \ldots, \quad \xi + n_q b_q = \eta_q, \end{cases}$$

et y_1 une valeur réelle arbitraire. Si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1$ étaient indépendantes, on pourrait déterminer ξ' et les entiers $m'_1, m'_2, \ldots, m'_p, n''_1$, de façon que les quantités

$$\xi' + m'_1 a_1 = \xi'_1, \quad \ldots, \quad \xi' + m'_p a_p = \xi'_p, \quad \xi' + n''_1 b_1 = \eta''_1$$

diffèrent respectivement aussi peu que l'on veut des nombres $\xi_1, \ldots, \xi_p, y_1$. Soit P′ le point de coordonnées $\xi'_1, \ldots, \xi'_p$. Puisque les champs sont équivalents on pourrait, d'autre part, trouver les entiers $n'_1, n'_2, \ldots, n'_q$ de façon que les nombres

$$\xi' + n'_1 b_1 = \eta'_1, \quad \xi' + n'_2 b_2 = \eta'_2, \quad \ldots, \quad \xi' + n'_q b_q = \eta'_q$$

soient respectivement voisins de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$. En particulier, $\xi' + n'_1 b_1 = \eta'_1$ devrait être, par un choix convenable de l'entier n'_1, voisin de η_1. Or on a

$$(n''_1 - n'_1) b_1 = \eta''_1 - \eta'_1 = y_1 - \eta_1 + (\eta''_1 - y_1) - (\eta'_1 - \eta_1).$$

Puisque $(\eta''_1 - y_1)$ et $(\eta'_1 - \eta_1)$ sont aussi petits que l'on veut, il faudrait que $y_1 - \eta_1$ soit un multiple de b_1; or y_1 est arbitraire; cela est donc impossible. La période b_1 appartient au corps $a_1, a_2, \ldots, a_p$; de même $b_2, b_3, \ldots, b_q$. Inversement $a_1, a_2, \ldots, a_p$ appartiennent au corps $b_1, b_2, \ldots, b_q$. Donc $p = q$. Les périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$ s'expriment par conséquent en fonction

de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ par des formules de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{q_1}{b_1} = \dfrac{r_1^1}{a_1} + \dfrac{r_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{r_p^1}{a_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{q_p}{b_p} = \dfrac{r_1^p}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{r_p^p}{a_p}, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} r_1^1 & \ldots & r_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^p & \ldots & r_p^p \end{vmatrix} \neq 0;$$

les coefficients q et r sont entiers, et l'on peut supposer que les coefficients d'une même ligne n'ont pas de diviseur commun. Je dis enfin que

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_p = 1 \qquad \text{et} \qquad \Delta = \pm 1.$$

Soient, en effet, P et Q deux points correspondants donnés (1). L'élimination de ξ entre les relations (1) et (2) donne

$$(3)\quad \begin{cases} q_1 \dfrac{\eta_1}{b_1} - \left(r_1^1 \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + r_p^1 \dfrac{\xi_p}{a_p}\right) = q_1 n_1 - (r_1^1 m_1 + \ldots + r_p^1 m_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_p \dfrac{\eta_p}{b_p} - \left(r_1^p \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + r_p^p \dfrac{\xi_p}{a_p}\right) = q_p n_p - (r_1^p m_1 + \ldots + r_p^p m_p). \end{cases}$$

Ceci posé, soit Q′ un point du champ B voisin de Q; $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_p$ ses coordonnées

$$\eta'_1 = \xi' + n'_1 b_1, \qquad \ldots, \qquad \eta'_p = \xi' + n'_p b_p;$$

si P′ est un point correspondant quelconque de Q′ défini par les entiers arbitraires $m'_1, \ldots, m'_p$, on aura entre les coordonnées de P′ et de Q′ des relations analogues à (3) où les lettres seraient accentuées, et, en les retranchant respectivement des équations (3), il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} q_1 \dfrac{(\eta'_1 - \eta_1)}{b_1} - \left[r_1^1 \dfrac{(\xi'_1 - \xi_1)}{a_1} + \ldots + r_p^1 \dfrac{(\xi'_p - \xi_p)}{a_p}\right] = q_1 (n'_1 - n_1) - [r_1^1 (m'_1 - m_1) + \ldots + r_p^1 (m'_p - m_p)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_p \dfrac{(\eta'_p - \eta_p)}{b_p} - \left[r_1^p \dfrac{(\xi'_1 - \xi_1)}{a_1} + \ldots + r_p^p \dfrac{(\xi'_p - \xi_p)}{a_p}\right] = q_p (n'_p - n_p) - [r_1^p (m'_1 - m_1) + \ldots + r_p^p (m'_p - m_p)]. \end{cases}$$

Puisque les champs sont correspondants on pourra déterminer les entiers $m'_1, m'_2, \ldots, m'_p$ de façon que $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p$ soient respectivement voi-

sins de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. Les premiers membres de (4) seront alors très petits; comme les seconds membres sont des entiers, ceux-ci devront être nuls. Il faut donc en définitive que, par un choix convenable d'entiers $m'_1, \ldots, m'_p$, on ait

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} q_1(n'_1 - n_1) = r_1^1(m'_1 - m_1) + \ldots + r_p^1(m'_p - m_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_p(n'_p - n_p) = r_1^p(m'_1 - m_1) + \ldots + r_p^p(m'_p - m_p); \end{array}\right.$$

ou, en d'autres termes, que les équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} r_1^1 x_1 + \ldots + r_p^1 x_p = q_1(n'_1 - n_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_1^p x_1 + \ldots + r_p^p x_p \quad q_p(n'_p - n_p) \end{array}\right.$$

admettent des solutions entières en $x_1, \ldots, x_p$. Si cette condition est remplie le point $\xi'_1, \ldots, \xi'_p$ est alors voisin du point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, comme le montrent les relations (4) où les seconds membres sont devenus nuls. Or, d'après le théorème déjà cité de M. Méray (p. 91), il faut pour cela que Δ divise tous les déterminants d'ordre p formés avec les éléments du Tableau

$$\left\|\begin{array}{cccc} r_1^1 & \ldots & r_p^1 & q_1(n'_1 - n_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^p & \ldots & r_p^p & q_p(n'_p - n_p) \end{array}\right\|.$$

Ces conditions sont toujours réalisées lorsque $\Delta = \pm 1$ et

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_p = 1.$$

Ceci montre déjà que les champs absolus obtenus avec les diverses bases du corps réduit défini par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont tous équivalents. Il est facile de voir que ce sont les seuls. Établissons pour cela que $\frac{1}{b_1}$ par exemple s'exprime en fonction linéaire à coefficients entiers de $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_p}$.

Écrivons en effet

$$\frac{q_1}{b_1} = q'_1\left(\frac{s_1^1}{a_1} + \frac{s_2^1}{a_2} + \ldots + \frac{s_p^1}{a_p}\right),$$

les entiers $s_1^1, s_2^1, \ldots, s_p^1$ étant supposés n'avoir aucun diviseur commun.

Si l'on pose

$$\frac{1}{a'_1} = \frac{s_1^1}{a_1} + \frac{s_2^1}{a_2} + \ldots + \frac{s_p^1}{a_p},$$

on pourra trouver une base [1] $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ du corps réduit $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ qui comprend la période a'_1. Les champs définis par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ et $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont encore équivalents. L'on a ici

$$\frac{q_1}{b_1} = \frac{q'_1}{a'_1},$$

$$\frac{q_2}{b_2} = \frac{r_1^2}{a'_1} + \frac{r_2^2}{a'_2} + \ldots + \frac{r_p^2}{a'_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les équations (6) deviennent

$$q'_1 x_1 = q_1(n'_1 - n_1),$$

$$r_1^2 x_1 + \ldots + r_p^2 x_p = q_2(n'_2 - n_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ces équations doivent avoir des solutions entières chaque fois que les quantités

$$(n'_1 - n_1)\, b_1 - (n'_2 - n_2)\, b_2, \quad \ldots, \quad (n'_1 - n_1)\, b_1 - (n'_p - n_p)\, b_p$$

deviennent très petites. Or il est clair qu'on peut rendre ces quantités aussi petites que l'on veut, avec un système d'entiers $(n'_1 - n_1)\ldots(n'_p - n_p)$, dans lequel $(n'_1 - n_1)$ n'est pas divisible par q'_1; les entiers q_1, q'_1 pouvant être supposés premiers entre eux, et le nombre $\frac{q_1(n'_1 - n_1)}{q'_1}$ devant être entier, il faut nécessairement que $q'_1 = 1$. L'équivalence étant une propriété réciproque, on en conclura également $q_1 = 1$. Il viendra donc en définitive

$$\frac{1}{b_1} = \frac{s_1^1}{a_1} + \ldots + \frac{s_p^1}{a_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{b_p} = \frac{s_1^p}{a_1} + \ldots + \frac{s_p^p}{a_p};$$

---

[1] *Voir* le théorème établi dans la Note I, à la fin du présent Mémoire.

comme la même propriété doit avoir lieu pour $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_p}$, vis-à-vis de $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_p}$, il faut de plus que

$$\begin{vmatrix} s_1^1 & \ldots & s_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^p & \ldots & s_p^p \end{vmatrix} = \pm 1,$$

ce qui établit la proposition. Les champs équivalents sont tous fournis par les bases du corps réduit.

Champs équivalents à un champ donné de périodes dépendantes. — Soient maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des périodes dépendantes, parmi lesquelles p sont indépendantes, par exemple $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Je veux montrer qu'*il existe un champ de p périodes indépendantes équivalent au champ défini par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Il existe, entre $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, $n-p$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme,

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{s_1^1}{a_1} + \frac{s_2^1}{a_2} + \ldots + \frac{s_n^1}{a_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{s_1^{n-p}}{a_1} + \frac{s_2^{n-p}}{a_2} + \ldots + \frac{s_n^{n-p}}{a_n} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_{p+1}^1 & \ldots & s_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p+1}^{n-p} & \ldots & s_n^{n-p} \end{vmatrix}$$

est différent de 0.

Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Étant donné un Tableau de $n(n-p)$ nombres entiers

$$\left\| \begin{matrix} s_1^1 & s_2^1 & \ldots & s_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \ldots & s_n^{n-p} \end{matrix} \right\|,$$

si l'on désigne par Δ *le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre* $(n-p)$ *formés avec les termes de ce Tableau, on peut trouver un système de* np *entiers* μ_i^j, *de façon que le déterminant*

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \dots & \mu_n^p \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{vmatrix}$$

soit égal à Δ.

Je ne sais si ce théorème est connu, j'en donne dans tous les cas une démonstration que, pour ne pas interrompre la suite des idées, j'ai placée dans une Note à la fin de ce travail.

Les entiers μ_i^j étant ainsi choisis, posons

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \dfrac{\mu_2^1}{a_2} + \dots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \dfrac{\mu_2^p}{a_2} + \dots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n}. \end{array} \right.$$

Les périodes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont bien déterminées, car si l'on avait, par exemple,

$$\frac{\mu_1^1}{a_1} + \frac{\mu_2^1}{a_2} + \dots + \frac{\mu_n^1}{a_n} = 0,$$

cette relation devrait être une conséquence de (1), de sorte que, dans le Tableau

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mu_1^1 & \dots & \mu_n^1 \\ s_1^1 & \dots & s_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{array} \right\|,$$

tous les déterminants d'ordre $n-p+1$ seraient nuls, ce qui entraînerait la nullité du déterminant (2), qui est égal à $\Delta \neq 0$. De plus, les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont indépendantes. Supposons, en effet, qu'il existât

des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ tels que l'on ait

$$\frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p} = 0;$$

on pourrait écrire, quels que soient les nombres rationnels $m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots, m_n$,

$$(4)\quad 0 = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p} + m_{p+1}\left(\frac{s_1^1}{a_1} + \ldots + \frac{s_n^1}{a_n}\right)$$
$$+ m_{p+2}\left(\frac{s_1^2}{a_1} + \ldots + \frac{s_n^2}{a_n}\right) + \ldots + m_n\left(\frac{s_1^{n-p}}{a_1} + \ldots + \frac{s_n^{n-p}}{a_n}\right).$$

Déterminons les nombres rationnels $m_{p+1}, \ldots, m_n$ de façon à rendre nuls les coefficients de $\frac{1}{a_{p+1}}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, ce qui s'exprime par les équations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\mu_{p+1}^1 + m_2\mu_{p+1}^2 + \ldots + m_p\mu_{p+1}^p + m_{p+1}s_{p+1}^1 + \ldots + m_n s_{p+1}^{n-p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1\mu_n^1 + m_2\mu_n^2 + \ldots + m_p\mu_n^p + m_{p+1}s_n^1 + \ldots + m_n s_n^{n-p} = 0; \end{array}\right.$$

cela est possible puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_{p+1}^1 & \ldots & s_{p+1}^{n-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n^1 & \ldots & s_n^{n-p} \end{vmatrix}$$

est différent de 0. La relation (4) se mettrait alors sous la forme

$$\frac{\mathbf{M}_1}{a_1} + \frac{\mathbf{M}_2}{a_2} + \ldots + \frac{\mathbf{M}_p}{a_p} = 0 \qquad (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_p \text{ rationnels}).$$

Les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant indépendantes, il faudrait que

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \ldots = \mathbf{M}_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\mu_1^1 + m_2\mu_1^2 + \ldots + m_p\mu_1^p + m_{p+1}s_1^1 + \ldots + m_n s_1^{n-p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1\mu_p^1 + m_2\mu_p^2 + \ldots + m_p\mu_p^p + m_{p+1}s_p^1 + \ldots + m_n s_p^{n-p} = 0. \end{array}\right.$$

L'ensemble des relations (5) et (6) considéré comme un système de n équations homogènes à n inconnues $m_1, m_2, \ldots, m_n$ aurait une solution différente de 0, le déterminant (2) serait nul; or ce déterminant est égal à $\Delta \neq 0$.

Par conséquent, les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ déterminées par les relations (3) *sont indépendantes.*

Nous allons montrer maintenant que *le champ absolu* B *défini par les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est équivalent au champ* A *des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Soient P un point du champ A, ξ sa valeur congrue, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ses coordonnées

$$\text{P} \qquad \xi + m_1 a_1 = \xi_1, \qquad \xi + m_2 a_2 = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad \xi + m_n a_n = \xi_n$$

et Q un point correspondant du champ B

$$\text{Q} \qquad \xi + n_1 \alpha_1 = \eta_1, \qquad \xi + n_2 \alpha_2 = \eta_2, \qquad \ldots, \qquad \xi + n_p \alpha_p = \eta_p.$$

On a, entre ces divers éléments, les relations suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\eta_1}{\alpha_1} - \left(\mu_1^1 \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{\xi_n}{a_n}\right) = n_1 - (\mu_1^1 m_1 + \mu_2^1 m_2 + \ldots + \mu_n^1 m_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\eta_p}{\alpha_p} - \left(\mu_1^p \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \dfrac{\xi_n}{a_n}\right) = n_p - (\mu_1^p m_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^p m_n), \\ \quad s_1^1 \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + s_n^1 \dfrac{\xi_n}{\alpha_n} = s_1^1 m_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + s_n^1 m_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad s_1^{n-p} \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + s_n^{n-p} \dfrac{\xi_n}{a_n} = s_1^{n-p} m_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + s_n^{n-p} m_n. \end{array} \right.$$

Si P′ est un point voisin de P

$$\text{P}' \qquad \xi' + m'_1 a_1 = \xi'_1, \qquad \xi' + m'_2 a_2 = \xi'_2, \qquad \ldots, \qquad \xi' + m'_n a_n = \xi'_n,$$

et si l'on détermine $n'_1, n'_2, \ldots, n'_p$ par les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} n'_1 - n_1 = \mu_1^1 (m'_1 - m_1) + \ldots + \mu_n^1 (m'_n - m_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n'_p - n_p = \mu_1^p (m'_1 - m_1) + \ldots + \mu_n^p (m'_n - m_n), \end{array} \right.$$

le point Q′

$$Q' \qquad \xi' + n'_1\alpha_1 = \eta'_1, \qquad \xi' + \eta'_2\alpha_2 = \eta'_2, \qquad \ldots, \qquad \xi' + n'_p\alpha_p = \eta'_p,$$

est voisin de Q, comme le montrent immédiatement les équations (7), desquelles on retranche respectivement, et membre à membre, les équations de même forme obtenues avec les coordonnées des points P′, Q′.

L'inverse a lieu également. En effet, les équations

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} n'_1 - n_1 = \mu_1^1(m'_1 - m_1) + \ldots + \mu_n^1(m'_n - m_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n'_p - n_p = \mu_1^p(m'_1 - m_1) + \ldots + \mu_n^p(m'_n - m_n), \\ \quad 0 \quad = s_1^1(m'_1 - m_1) + \ldots + s_n^1(m'_n - m_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad 0 \quad = s_1^{n-p}(m'_1 - m_1) + \ldots + s_1^{n-p}(m'_n - m_n) \end{array}\right.$$

ont, quels que soient les entiers $(n'_1 - n_1), \ldots, (n'_p - n_p)$, des solutions entières par rapport aux inconnues $(m'_1 - m_1), \ldots, (m'_n - m_n)$. Cela résulte de ce que, le déterminant Δ formé avec les coefficients des inconnues, divise tous les déterminants d'ordre n formés avec les éléments du Tableau

$$\left\|\begin{array}{ccccc} (n'_1 - n_1) & \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_n^1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n'_p - n_p) & \mu_1^p & \mu_2^p & \ldots & \mu_n^p \\ 0 & s_1^1 & s_2^1 & \ldots & s_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \ldots & s_n^{n-p} \end{array}\right\|.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de développer un tel déterminant suivant la règle de Laplace par rapport aux $(n-p)$ dernières lignes. On obtient ainsi une somme de termes qui contiennent tous en facteur un déterminant d'ordre $(n-p)$ formé avec le Tableau des coefficients s_i^j, et ces déterminants sont tous divisibles par Δ.

Ceci posé, soient donc

$$\eta'_1 = \xi' + n'_1\alpha_1, \qquad \ldots, \qquad \eta'_p = \xi' + n'\alpha_p$$

les coordonnées d'un point Q′ voisin de Q, nous déterminerons $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ par les équations (9). Considérant le point P′ de coordonnées

$$\xi'_1 = \xi' + m'_1 a_1, \qquad \ldots, \qquad \xi'_n = \xi' + m'_n a_n$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\eta'_1 - \eta_1}{\alpha_1} &= \mu_1^1 \frac{\xi'_1 - \xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{\xi'_n - \xi_n}{a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\eta'_p - \eta_p}{\alpha_p} &= \mu_1^p \frac{\xi'_1 - \xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \frac{\xi'_n - \xi_n}{a_n}, \\
0 &= s_1^1 \frac{\xi'_1 - \xi_1}{a_1} + \ldots + s_n^1 \frac{\xi'_1 - \xi_n}{a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= s_1^{n-p} \frac{\xi'_1 - \xi_1}{a_1} + \ldots + s_n^{n-p} \frac{\xi'_n - \xi_n}{a_n};
\end{aligned}$$

comme $(\eta'_1 - \eta_1), \ldots, (\eta'_p - \eta_p)$ sont voisins de o par hypothèse, il en résulte que $(\xi'_1 - \xi_1), \ldots, (\xi'_n - \xi_n)$ sont également voisins de o, c'est-à-dire P′ voisin de P. La proposition est complètement établie.

Nous sommes donc en possession d'un système de p périodes indépendantes, dont le champ est équivalent au champ donné A. Il résulte du paragraphe précédent que tous les champs de périodes indépendantes équivalents au champ A s'obtiennent en considérant les diverses bases du corps réduit défini par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Cela nous montre également que lorsque l'on a déterminé un système de coefficients μ_i^j satisfaisant aux conditions indiquées plus haut, on les obtient tous, en effectuant sur les formes linéaires

$$\begin{aligned}
y_1 &= \mu_1^1 x_1 + \ldots + \mu_n^1 x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_p &= \mu_1^p x_1 + \ldots + \mu_n^p x_n,
\end{aligned}$$

une substitution à coefficients entiers

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1^1 y_1 + r_2^1 y_2 + \ldots + r_p^1 y_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_p &= r_1^p y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + r_p^p y_p
\end{aligned}$$

dont le déterminant est assujetti à la seule condition d'être égal à ± 1.

Le corps réduit défini par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *sera aussi, par définition, le corps réduit défini par* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Toute période α de ce corps est donnée par une formule de la forme

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\nu_1}{\alpha_1} + \frac{\nu_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\nu_p}{\alpha_p},$$

où $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ sont des entiers quelconques. En remplaçant $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ par leurs expressions en fonction de $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, on a finalement

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

$m_1, \ldots, m_n$ étant entiers. Inversement, *toute période* α *donnée par une telle formule, où* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *sont des entiers quelconques, appartient au même corps réduit,* si toutefois le nombre $\frac{1}{\alpha}$ ainsi défini n'est pas nul. La proposition sera évidemment établie si l'on montre que $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ s'expriment en fonction linéaire à coefficients entiers de $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$. Résolvons, en effet, les équations

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_1} &= \frac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \frac{\mu_n^1}{a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{1}{\alpha_p} &= \frac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \frac{\mu_n^p}{a_n}, \\
0 &= \frac{s_1^1}{a_1} + \ldots + \frac{s_n^p}{a_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= \frac{s_1^{n-p}}{a_1} + \ldots + \frac{s_n^p}{a_n}.
\end{aligned}$$

On obtient, par exemple,

$$\Delta \frac{1}{a_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \mu_2^1 & \dots & \mu_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\alpha_p} & \mu_2^p & \dots & \mu_n^p \\ 0 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s_2^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{vmatrix};$$

le second membre est une fonction linéaire de $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_p}$ dont les coefficients sont entiers et divisibles par Δ, par conséquent,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{r_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{r_p}{\alpha_p} \qquad (r_1, r_2, \dots, r_p \text{ entiers});$$

de même, pour $\frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

Le corps réduit défini par des périodes dépendantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ est donc susceptible d'une définition directe, identique à celle adoptée dans le cas de périodes indépendantes; c'est l'ensemble des périodes α données par la formule *à coefficients entiers*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \dots + \frac{m_n}{a_n}.$$

Nous obtenons maintenant la condition générale *pour que les champs définis par deux systèmes de périodes quelconques* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_q)$ *soient équivalents : il faut et il suffit que les corps réduits définis par ces deux systèmes de périodes soient identiques.*

Champs multiples d'un champ donné. — Soit un champ absolu A défini par des périodes quelconques $a_1, a_2, \dots, a_n$. Nous dirons que le champ B défini par $b_1, b_2, \dots, b_m$ est un multiple du champ A s'il satisfait aux conditions suivantes :

P *et* Q *désignant deux points correspondants quelconques dans les*

champs A *et* B, *il faut et il suffit qu'à tout point* Q′, *voisin de* Q *dans le champ* B, *on puisse faire correspondre* (*au sens donné à ce mot* p. 96) *un point* P′ *du champ* A *voisin de* P.

Le champ multiple B possède donc une des propriétés qui caractérisent l'équivalence. Si réciproquement A était le multiple de B, les deux champs A et B seraient équivalents. L'ensemble des champs multiples d'un champ donné comprend évidemment l'ensemble des champs équivalents. Le multiple d'un multiple est encore un multiple.

Il est clair que si A′ et B′ désignent des champs respectivement équivalents aux champs A et B, le champ B′ est un multiple de A′. Il suit de là que, pour rechercher les conditions de la multiplicité, on peut toujours substituer aux champs donnés des champs équivalents, et, en particulier, des champs de périodes indépendantes.

Soient donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les périodes indépendantes qui définissent le champ A′, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ les périodes indépendantes qui définissent B′ multiple de A′. Un raisonnement identique à celui de la page 97 montrerait immédiatement que l'on a

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{r_1^1}{\beta_1} + \ldots + \dfrac{r_q^1}{\beta_q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{r_1^p}{\beta_1} + \ldots + \dfrac{r_q^p}{\beta_q} \end{array}\right\} \qquad r_i^j \text{ entiers;}$$

mais ici $\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_q}$ ne s'expriment plus nécessairement en fonction de $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ par des formules de même forme. On conclut de là que $q \geqq p$ puisque les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont indépendantes.

Ainsi l'ordre des champs multiples d'un champ donné est supérieur, au plus égal, à l'ordre du champ considéré.

Les conditions (1) sont d'ailleurs suffisantes, c'est-à-dire que, si les périodes indépendantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ sont liées aux périodes α par des relations de la forme (1), elles définissent un champ multiple du champ A, sans que les entiers r_i^j satisfassent à des conditions particulières, si ce n'est

que dans le Tableau de ces coefficients, il y ait au moins un déterminant d'ordre p différent de 0; ce qui a lieu d'ailleurs nécessairement, puisque, par hypothèse, les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont indépendantes. Le procédé de démonstration est toujours le même et je crois inutile de le répéter ici.

Soit maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un système de n périodes quelconques indépendantes ou non, dont le champ est multiple du champ des périodes *indépendantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ est un système de périodes indépendantes dont le champ est équivalent à celui de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a entre les α et les β les relations (1). D'autre part $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_q}$ s'expriment, comme nous l'avons vu, en fonction linéaire à coefficients entiers de $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, de sorte que l'on peut écrire finalement

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_1} = \frac{\mu_1^1}{a_1} + \frac{\mu_2^1}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n^1}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\alpha_p} = \frac{\mu_1^p}{a_1} + \frac{\mu_2^p}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n^p}{a_n} \end{array}\right\} \qquad \mu_i^j \text{ entiers.}$$

Inversement, tout système d'un nombre quelconque de périodes a_1, $a_2, \ldots, a_n$ dont les inverses sont liés à $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ par des formules de la forme (2), définit un champ multiple du champ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, *sans que les entiers* μ_i^j *soient assujettis à des conditions particulières,* si ce n'est que les déterminants d'ordre p formés avec ces coefficients ne soient pas tous nuls.

La démonstration se fait directement par le même procédé que nous avons tant de fois employé. Bien entendu, *parmi les périodes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *il y en a au moins* p *d'indépendantes.*

On remarquera que toute période du corps réduit défini par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ appartient au corps réduit défini par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En d'autres termes, *le corps réduit défini par* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *comprend le corps réduit défini par* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

Citons, à titre d'exemple particulier de champs multiples, le champ défini par les périodes $m_1 a_1, m_2 a_2, \ldots, m_n a_n$, qui est toujours un multiple du champ déterminé par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Champ résultant. Multiple commun à plusieurs champs. — Soient $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des champs donnés, définis respectivement par les systèmes de périodes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $\ldots$, $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$. Désignons par R le champ absolu défini par le système total des périodes $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, \ldots, l_1, \ldots, l_k)$.

Nous appellerons ce champ, le *champ résultant* des champs A_1, $A_2, \ldots, A_r$. On établit sans peine que, si l'on remplace $A_1, A_2, \ldots, A_r$ par des champs $A'_1, A'_2, \ldots, A'_r$ qui leur sont respectivement équivalents, le champ résultant R′ ainsi obtenu est équivalent à R.

L'ordre p du champ R est au moins égal au plus grand des nombres qui représentent les ordres des champs $A_1, A_2, \ldots, A_r$, et au plus égal à leur somme.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p périodes indépendantes dont le champ est équivalent à R. Comme nous l'avons vu, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ s'expriment par des fonctions linéaires à coefficients entiers de $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_m}, \ldots, \frac{1}{l_1}, \ldots, \frac{1}{l_k}$, et, inversement, ces derniers nombres s'expriment par des fonctions linéaires à coefficients entiers de $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$.

Nous dirons, maintenant, que *le champ* B *est un multiple commun aux champs* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *s'il est le multiple de chacun d'eux, considéré isolément.* Il résulte de la définition même, que le champ résultant est un multiple commun, et, par suite aussi, tous les multiples du champ résultant. Il est bien facile de voir que l'on obtient de cette façon tous les multiples communs aux champs $A_1, A_2, \ldots, A_r$. En effet, soient R′ un multiple commun, P un point de ce champ, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ des correspondants de P dans les champs $A_1, A_2, \ldots, A_r$; désignons par $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, $\ldots$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ les coordonnées des points $P_1, P_2, \ldots, P_r$.

Le point Q de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est un point du champ résultant R. Soit maintenant P′ un point voisin de P.

On pourra, d'après la définition même, trouver dans les champs A_1, $A_2, \ldots, A_r$ des points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_r$ respectivement voisins de P_1, $P_2, \ldots, P_r$. Si nous désignons par $(\xi'_1, \ldots, \xi'_n), \ldots, (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k)$ les coordonnées de ces divers points, le point Q′ du champ R dont les coordonnées

sont $(\xi'_1, \ldots, \xi'_n, \eta'_1, \ldots, \eta'_m, \ldots, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_k)$ est voisin du point Q, c'est-à-dire en définitive que R′ est bien un multiple de R.

REMARQUE GÉNÉRALE.

Toutes les propriétés que nous venons d'établir, en supposant l'ensemble E des valeurs congrues ξ (p. 84) composé de toutes les valeurs réelles de la variable ξ, subsistent lorsqu'on suppose que ξ varie dans un domaine infini quelconque, par exemple de o à $+\infty$. Il n'en est plus de même lorsque l'ensemble E est constitué par les valeurs d'un domaine fini; le champ absolu perd alors toutes ses propriétés relatives à la densité; tout domaine fini ne contient plus qu'un nombre limité de caractéristiques.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES CONTINUES.

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES ATTACHÉES A UN MÊME CHAMP DE PÉRIODES.

La notion de champ de périodes nous permettra maintenant de définir une classe particulière de fonctions qui, par leurs propriétés, se rapprochent des fonctions périodiques et comprennent, comme cas particuliers, les fonctions de fonctions simplement périodiques. L'introduction des corps de périodes, et l'étude que nous avons faite dans la première Partie sur les fonctions périodiques de plusieurs variables, nous serviront à établir certaines de leurs propriétés. J'ai qualifié ces fonctions de QUASI-PÉRIODIQUES pour une raison qu'on verra bientôt.

Définitions. — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des périodes *indépendantes*, et A le champ absolu (p. 83), qu'elles définissent.

Soit d'autre part $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, définie pour toutes les valeurs réelles de cette variable comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, mais, à part cette condition, absolument arbitraire [1].

A tout point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ du champ absolu correspond une valeur congrue ξ et une seule [2] et l'on a, avec un choix convenable d'entiers $m_1, \ldots, m_n$,

$$\xi + m_1 a_1 = \xi_1, \qquad \ldots, \qquad \xi + m_n a_n = \xi_n.$$

A l'élément $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nous ferons correspondre la valeur $f(\xi)$, défi-

[1] Tout ce qui va suivre s'appliquerait encore si, au lieu d'être définie de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction $f(x)$ était seulement définie dans un intervalle infini quelconque, de 0 à $+\infty$ par exemple, le champ absolu resterait dense; il n'en serait plus de même si $f(x)$ n'était définie que dans un intervalle fini; le champ absolu correspondant à cet intervalle ne serait plus dense, et les définitions qui suivent n'auraient aucun sens.

[2] Nous supposons $n > 1$.

nissant ainsi, *sur le champ absolu*, une certaine fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ que nous appellerons la *fonction associée* de $f(x)$ sur le champ considéré.

On a manifestement, quel que soit x,

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x),$$

car la valeur x est toujours congrue à l'élément de coordonnées x, $x, \ldots, x$. Plus généralement, si x_0 désigne la valeur congrue à l'élément ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$, on a

$$f(x + x_0) = F(\xi_1 + x, \xi_2 + x, \ldots, \xi_n + x),$$

puisque $x + x_0$ est congru à l'élément $\xi_1 + x, \xi_2 + x, \ldots, \xi_n + x$. Ceci montre que, sur un segment de caractéristique, la fonction associée prend les valeurs que la fonction $f(x)$ prend elle-même dans un certain intervalle (α, β) correspondant au segment considéré.

La fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est manifestement périodique en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, les périodes étant respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_n$. A part cette condition de périodicité, la fonction F est arbitraire, c'est-à-dire que, si elle est arbitrairement donnée, on peut trouver une fonction $f(x)$, et une seule, dont elle est l'associée. Il suffit de prendre

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x);$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant un élément quelconque du champ absolu et ξ sa valeur congrue, on a en effet, en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les entiers correspondants,

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = F(\xi_1 - m_1 a_1, \xi_2 - m_2 a_2, \ldots, \xi_n - m_n a_n) = F(\xi, \xi, \ldots, \xi) = f(\xi).$$

Enfin, il est clair que si deux fonctions ont même fonction associée, elles sont identiques. La fonction associée d'une somme, d'une différence, est égale à la somme, à la différence, des fonctions associées.

A toute fonction donnée $f(x)$ correspond ainsi une fonction associée bien déterminée $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, définie en tous les points du champ absolu A; mais, relativement à la nature et à la distribution de ses discontinuités, cette fonction est quelconque.

Dès que l'on imposera aux discontinuités des fonctions associées la

condition d'être distribuées d'une façon particulière, on distinguera par là même, dans l'ensemble des fonctions réelles $f(x)$, un ensemble de fonctions présentant des caractères fonctionnels particuliers; c'est précisément en choisissant parmi toutes les hypothèses possibles que l'on définira les fonctions quasi-périodiques.

Les hypothèses les plus simples sont évidemment les suivantes :

1° *Les fonctions associées sont* UNIFORMÉMENT CONTINUES (1) *sur le champ absolu;* nous appellerons *les fonctions correspondantes, des fonctions* QUASI-PÉRIODIQUES UNIFORMÉMENT CONTINUES.

2° *Les fonctions associées sont simplement* CONTINUES (2) *sur le champ absolu; les fonctions correspondantes sont alors des fonctions* QUASI-PÉRIODIQUES CONTINUES (3) *ou* SIMPLEMENT CONTINUES.

Les fonctions quasi-périodiques continues, ou uniformément continues, sont continues pour toute valeur x de la variable, puisque leurs associées sont continues sur toute caractéristique, mais les fonctions quasi-périodiques uniformément continues possèdent de plus la propriété suivante :

Étant donné ε, *on peut déterminer* ρ *de façon que, x et x' étant deux valeurs* quelconques *de la variable assujetties à la seule condition*

$$|x - x'| < \rho,$$

on ait

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Les unes et les autres de ces fonctions possèdent la propriété fondamentale suivante :

---

(1) J'entends par là uniformément continues dans le domaine parallélépipédique

$$0 < \xi_1 < a_1, \quad \ldots \quad 0 < \xi_n < a_n;$$

le champ absolu étant périodique, la continuité uniforme est alors réalisée dans tout domaine infini, c'est-à-dire *pour toutes les valeurs* de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, aussi grandes qu'elles puissent être.

(2) Cette distinction a un sens, comme je l'ai fait remarquer page 10.

(3) L'ensemble des fonctions quasi-périodiques continues comprend évidemment celui des fonctions quasi-périodiques uniformément continues.

Étant donné un intervalle quelconque (α, β) *on peut trouver une infinité d'intervalles égaux au premier* $(\alpha + h, \beta + h)$, *aussi éloignés que l'on veut du premier, tels qu'étant donné* ε, *on ait pour toutes les valeurs* x *de l'intervalle* (α, β)

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon;$$

en d'autres termes, *la fonction* $f(x)$ *repasse approximativement, dans l'intervalle* $(\alpha + h, \beta + h)$, *par la série des valeurs qu'elle prend dans l'intervalle* (α, β). C'est pour rappeler cette propriété que j'ai adopté la dénomination de *fonctions quasi-périodiques*.

Cette propriété est à peu près évidente. En effet, à l'intervalle (α, β) correspondent, dans le champ absolu, des *portions finies de caractéristiques*.

Considérons l'une de ces portions, et désignons par $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$ un point du champ absolu qui a α pour valeur congrue. On a

$$f(x+\alpha) = \mathrm{F}(\xi_1^0 + x, \xi_2^0 + x, \ldots, \xi_n^0 + x).$$

Mais nous savons (p. 87) qu'il existe des caractéristiques aussi voisines que l'on veut de la précédente. D'autre part la fonction F étant continue sur le champ absolu, si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désigne un élément situé sur le segment de caractéristique considéré, à tout nombre ε on peut faire correspondre ρ, de façon que sous les conditions

$$|\xi'_1 - \xi_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi'_n - \xi_n| < \rho$$

on ait

$$|\mathrm{F}(\xi'_1, \ldots, \xi'_n) - \mathrm{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon;$$

comme le segment est fini, on peut trouver ρ de façon que cette inégalité ait lieu pour tous les points du segment. Soit alors $\xi_1'^0, \xi_2'^0, \ldots, \xi_n'^0$ un point pour lequel

$$|\xi_1'^0 - \xi_1^0| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n'^0 - \xi_n^0| < \rho;$$

si $\alpha + h$ est la valeur congrue à l'élément $\xi_1'^0, \ldots, \xi_n'^0$, on a

$$f(x+\alpha+h) = \mathrm{F}(\xi_1'^0 + x, \ldots, \xi_n'^0 + x)$$

et, par suite, puisque

$$|(\xi_1'^0 + x) - (\xi_1^0 + x)| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |(\xi_n'^0 + x) - (\xi_n^0 + x)| < \rho,$$

$$|f(x + \alpha + h) - f(x + \alpha)| < \varepsilon;$$

inégalité qui a lieu lorsque x varie de o à $(\beta - \alpha)$. On peut trouver une infinité de valeurs h permettant d'écrire cette inégalité, puisqu'il existe au voisinage du point $(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ autant de points que l'on veut du champ absolu; h est d'autant plus grand que l'on considère des points plus rapprochés du précédent. La proposition est ainsi établie :

Les fonctions quasi-périodiques définies à l'aide d'un même champ absolu constituent, par définition, l'ensemble des fonctions quasi-périodiques attachées à ce champ.

Les fonctions quasi-périodiques uniformément continues sont de beaucoup les plus importantes, celles que l'on rencontre surtout dans les applications.

Quant aux fonctions quasi-périodiques simplement continues elles sont loin d'être sans intérêt; on les rencontre notamment dans des problèmes d'intégration où interviennent des fonctions quasi-périodiques uniformément continues.

Les fonctions associées de fonctions quasi-périodiques uniformément continues jouissent de propriétés particulières. Nous avons vu, en effet (p. 11), que, si la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est uniformément continue sur un champ dense, il existe une fonction continue, par suite, uniformément continue $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie pour toutes les valeurs des variables, et prenant en tout point du champ la valeur $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Ici les périodes a_1, $a_2, \ldots, a_n$ étant supposées indépendantes, le champ absolu est dense dans tout domaine à n dimensions. Il existe donc une fonction continue $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *et une seule*, qui, à cause de la périodicité en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est uniformément continue dans tout domaine infini, et qui, en tout point du champ absolu, prend la valeur $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi)$, ou si l'on veut, sous une autre forme : il existe une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et *une seule*, périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*indépendantes*),

vérifiant, quel que soit x, l'identité

$$f(x) = \mathrm{F}(x, x, \ldots, x)$$

La fonction $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera, par définition, l'*associée de $f(x)$ sur le champ total*, ou simplement, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, l'associée de $f(x)$.

Il résulte de là, que les fonctions quasi-périodiques uniformément continues sont *bornées* dans tout domaine infini, c'est-à-dire qu'en valeur absolue, elles restent inférieures à un nombre fixe. Il n'en est plus nécessairement de même des fonctions quasi-périodiques simplement continues; bien que finies pour toute valeur x, il peut se faire qu'elles dépassent, en valeur absolue, tout nombre donné.

Les fonctions quasi-périodiques uniformément continues peuvent être définies de plusieurs façons différentes. Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (22 novembre 1902), j'avais donné cette définition :

La fonction $f(x)$ est dite QUASI-PÉRIODIQUE *si à tout système de valeurs arbitrairement choisies $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut faire correspondre un nombre $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jouissant des propriétés suivantes : étant donné ε positif quelconque on peut déterminer $\rho > 0$ de façon que, pour tous les nombres x, qui avec un choix convenable d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ satisfont aux inégalités*

$$(1) \qquad |x + m_1 a_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |x + m_n a_n - x_n| < \rho,$$

on ait

$$(2) \qquad |f(x) - \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Cette propriété caractérise les fonctions *quasi-périodiques uniformément continues, mais celles-là seulement.*

Soit, en effet, $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la fonction associée d'une fonction quasi-périodique uniformément continue. Étant donné ε, on peut trouver $\rho > 0$ de façon que, sous les seules conditions

$$|x'_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |x'_n - x_n| < \rho,$$

on ait

$$|\mathrm{F}(x'_1, \ldots, x'_n) - \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Ceci posé, soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de valeurs quelconques mais fixes, et considérons tous les nombres x satisfaisant aux inégalités (1). En posant

$$x + m_1 a_1 = \xi_1, \qquad \ldots, \qquad x + m_n a_n = \xi_n,$$

on obtient

$$|\xi_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n - x_n| < \rho$$

et, par suite,

$$|F(\xi_1, \ldots, \xi_n) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon;$$

mais comme

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(x),$$

il en résulte

$$|f(x) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Les fonctions quasi-périodiques uniformément continues satisfont bien à la seconde définition.

Inversement, soit $f(x)$ une fonction satisfaisant à cette définition. A tout système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspond un nombre $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, défini comme l'indiquent les inégalités (1) et (2); mais de la définition même ne résulte *a priori* aucune propriété relative à la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$, si ce n'est qu'elle est périodique par rapport à chaque variable. De plus, si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est un élément quelconque du champ absolu, ξ sa valeur congrue, on a

$$f(\xi) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

En effet, aussi petits que soient ε et le nombre ρ correspondant qui figurent dans la seconde définition, le nombre ξ appartiendra toujours à l'ensemble des nombres x satisfaisant aux inégalités

$$|x + m_1 a_1 - \xi_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |x + m_n a_n - \xi_n| < \rho,$$

puisque l'on a exactement, avec un choix convenable d'entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$,

$$\xi + \mu_1 a_1 - \xi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \xi + \mu_n a_n - \xi_n = 0.$$

La quantité fixe $|f(\xi) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)|$ étant inférieure à tout nombre donné ε est nulle. La fonction $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est donc l'associée de $f(x)$ sur le champ absolu. Pour établir que $f(x)$ est une fonction quasi-périodique

uniformément continue, il suffit de montrer maintenant, que $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est uniformément continue sur le champ absolu, condition qui sera *a fortiori* réalisée si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est elle-même continue, ce que nous allons établir.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de valeurs quelconques, mais fixes; je dis d'abord qu'étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\rho > 0$, de façon que si ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ représente un point quelconque du champ absolu assujetti aux seules conditions

$$(3) \qquad |\xi_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n - x_n| < \rho,$$

on a

$$|F(\xi_1, \ldots, \xi_n) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

En effet, au nombre ε on peut faire correspondre ρ, de façon que pour tous les nombres x qui, avec un choix convenable d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, satisfont aux inégalités

$$(4) \qquad |x + m_1 a_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |x + m_n a_n - x_n| < \rho$$

on ait

$$|f(x) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Or, ρ étant ainsi déterminé, si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ est un élément du champ absolu satisfaisant aux conditions (3), la valeur congrue ξ à cet élément fait partie de l'ensemble des nombres x définis par les inégalités (4), donc

$$|f(\xi) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon;$$

or, comme

$$f(\xi) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

il en résulte, sous les seules conditions (3),

$$(5) \qquad |F(\xi_1, \ldots, \xi_n) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Ceci posé, soit ρ le plus grand des nombres permettant, étant donné ε, de satisfaire à l'inégalité (5) sous les conditions (3); ρ est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Lorsqu'on fait varier $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ρ a un minimum absolu différent de 0. En effet, la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ étant périodique,

on peut se borner au domaine parallélépipédique

$$0 \leqq x_1 < a_1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_n < a_n.$$

Si ρ avait un minimum nul, il suffirait, en suivant une méthode classique, de considérer un ensemble de points pour lesquels ρ serait de plus en plus petit, et tendrait vers 0. Alors, P étant un point limite, il ne pourrait exister pour ce point de nombre $\rho > 0$ permettant d'écrire les inégalités correspondantes (3) et (5), ce qui est impossible. Il en résulte donc, qu'étant donné ε, on peut choisir ρ de telle façon que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant un point quelconque (du champ absolu ou du champ total) et $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un point quelconque du champ absolu, ces deux points étant assujettis aux seules conditions

$$|\xi_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n - x_n| < \rho,$$

on ait

$$|F(\xi_1, \ldots, \xi_n) - F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

La démonstration s'achève maintenant sans difficulté. Soient

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad (x'_1, \ldots, x'_n)$$

deux points quelconques assujettis seulement à vérifier les inégalités

$$|x'_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |x'_n - x_n| < \rho.$$

On peut alors trouver un élément du champ absolu (puisque celui-ci est dense dans tout domaine) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ pour lequel on a simultanément

$$|\xi_1 - x_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n - x_n| < \rho,$$
$$|\xi_1 - x'_1| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |\xi_n - x'_n| < \rho;$$

par suite,

$$|F(x_1, \ldots, x_n) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon, \qquad |F(x'_1, \ldots, x'_n) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon,$$

d'où

$$|F(x'_1, \ldots, x'_n) - F(x_1, \ldots, x_n)| < 2\varepsilon,$$

ce qui établit *la continuité uniforme* de la fonction F dans le domaine

$$0 \leqq x_1 < a_1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_n < a_n$$

et, par conséquent, *dans tout domaine infini*. La fonction

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x)$$

est donc une fonction quasi-périodique uniformément continue.

D'ailleurs, à part la périodicité et la continuité, la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est quelconque; en d'autres termes, *toute fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *continue et périodique définit une fonction quasi-périodique uniformément continue*

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x)$$

attachée au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En tout point du champ absolu, on a bien, en effet,

$$f(\xi) = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ étant uniformément continue sur le champ absolu. On verrait sans peine que *si deux fonctions continues périodiques* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *à périodes indépendantes, deviennent identiques lorsqu'on fait* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, *ces deux fonctions sont identiques par rapport à l'ensemble des variables.*

La deuxième définition, qu'on vient de comparer à la première, montre que lorsque $n = 1$ on retombe sur la définition des fonctions continues simplement périodiques.

Examinons maintenant les fonctions caractérisées par M. Bohl dans un Mémoire cité [1] et voyons de quelle façon elles se rattachent aux fonctions quasi-périodiques.

M. Bohl considère une fonction $f(x)$ qui, *dans un domaine donné* T (domaine qui du reste peut être *infini*), est développable en une série *uniformément convergente*

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu + \ldots, \tag{6}$$

dans laquelle le terme général u_ν est un polynome entier en

$$\cos 2\pi \frac{x}{a_1}, \quad \cos 2\pi \frac{x}{a_2}, \quad \ldots, \quad \cos 2\pi \frac{x}{a_n}, \quad \sin 2\pi \frac{x}{a_1}, \quad \ldots, \quad \sin 2\pi \frac{x}{a_n},$$

---

[1] *Voir* l'Introduction.

les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant différentes de 0, mais *quelconques*, c'est-à-dire indépendantes ou non.

On peut remarquer d'ailleurs qu'en transformant les produits de sinus et cosinus, en sommes de sinus et cosinus, chaque terme u_ν peut aussi se mettre sous la forme d'une somme finie de termes de la forme

$$\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+\ldots+\frac{m_n}{a_n}\right), \quad \sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1}+\frac{m_2}{a_2}+\ldots+\frac{m_n}{a_n}\right),$$

$m_1, \ldots, m_n$ étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

M. Bohl a formulé, et c'est là le principal objet de son Mémoire, une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un tel développement :

Il faut et il suffit, qu'étant donné ε positif, on puisse déterminer un nombre positif δ de façon que, x et $x+h$ appartenant au domaine T, *on ait*

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

chaque fois que les nombres

$$\frac{h}{a_1}, \quad \frac{h}{a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{h}{a_n}$$

diffèrent de nombres entiers de moins de δ en valeur absolue.

Je laisse de côté la nécessité de la condition qui est presque immédiate. Pour en établir la suffisance, M. Bohl montre d'abord que, si elle est satisfaite, il existe une fonction *continue* $F(x_1, \ldots, x_n)$, *définie pour toutes les valeurs des variables*, périodique et de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par rapport à ces variables et vérifiant, pour toute valeur x du domaine T, l'identité

$$f(x)=F(x, x, \ldots, x).$$

C'est d'ailleurs là une propriété, que nous retrouverons par un procédé absolument différent de celui de M. Bohl.

L'auteur établit, d'autre part, qu'une fonction périodique continue $F(x_1, \ldots, x_n)$ est développable en une série uniformément convergente

$$U_1+U_2+\ldots+U_\nu+\ldots,$$

dont le terme général est un polynome entier en

$$\cos 2\pi \frac{x_1}{a_1}, \quad \ldots, \quad \cos 2\pi \frac{x_n}{a_n}, \quad \sin 2\pi \frac{x_1}{a_1}, \quad \ldots, \quad \sin 2\pi \frac{x_n}{a_n};$$

en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ on obtient immédiatement le développement en question

Laissons de côté, pour l'instant, le cas où les périodes $a_1, \ldots, a_n$ sont dépendantes; nous verrons bientôt qu'à notre point de vue, ce cas ne diffère pas essentiellement de celui où elles sont indépendantes.

Si le domaine T *est infini*, retenant la seule identité

$$f(x) = \mathrm{F}(x, x, \ldots, x),$$

nous voyons que les fonctions représentées par le développement considéré, supposé uniformément convergent dans T, sont précisément celles que nous avons désignées sous le nom de *fonctions quasi-périodiques uniformément continues*, et l'on en conclut qu'inversement, *toute fonction de cette espèce est représentable par un tel développement.*

Lorsque le domaine T est *fini*, le développement de M. Bohl représente une fonction à laquelle ne peut s'appliquer, au sens où nous l'entendons, l'expression de quasi-périodique, celle-ci supposant le champ absolu dense, et, par suite, le domaine T infini. On peut dire toutefois que si une fonction $f(x)$ satisfait dans un domaine T à la condition de M. Bohl, il existe une fonction quasi-périodique uniformément continue qui, dans le domaine T, coïncide avec $f(x)$.

Nous avons donc trois définitions distinctes, mais équivalentes, des fonctions quasi-périodiques uniformément continues. Bien que la première (p. 115) soit peut-être la moins naturelle, je lui donnerai cependant la préférence, parce qu'elle met en évidence toute l'extension dont est susceptible la notion de quasi-périodicité, et qu'elle permet d'en entrevoir l'application aux fonctions discontinues. De plus, elle range tout naturellement, à côté des fonctions quasi-périodiques uniformément continues, les fonctions quasi-périodiques simplement continues dont l'importance n'est pas douteuse.

Quant à ces dernières, la voie suivie par M. Bohl permettrait également

de les obtenir, en leur étendant la condition qu'il a trouvée pour l'existence des développements en série de la forme indiquée plus haut.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour toute valeur x [1].

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit quasi-périodique continue est que, pour chaque valeur x, on puisse, étant donné ε positif, trouver un nombre positif δ de façon que l'on ait

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,$$

chaque fois que les quantités

$$\frac{h}{a_1},\quad \frac{h}{a_2},\quad \ldots,\quad \frac{h}{a_n}$$

diffèrent de nombres entiers de moins de δ en valeur absolue. Ici x est fixe et h prend toutes les valeurs réelles ou, plus exactement, $x+h$ peut prendre toutes valeurs du domaine infini dans lequel la fonction est définie.

La condition qu'on vient d'écrire exprime en effet tout simplement, comme il est bien aisé de s'en assurer, la continuité de la fonction associée, en tout point du champ absolu, dont x est la valeur congrue. Le nombre δ correspondant à ε peut varier avec x, mais, ε restant fixe, δ n'a son minimum différent de o que si $f(x)$ est uniformément continue.

Il résulte immédiatement de là que, dans un domaine T quelconque, mais *fini*, une fonction quasi-périodique simplement continue est développable en une série uniformément convergente de la forme (6), et qu'on peut trouver une fonction quasi-périodique uniformément continue coïncidant dans T avec la fonction considérée.

Cette propriété permet d'établir qu'une fonction quasi-périodique simplement continue peut toujours être considérée comme la limite [2] d'une suite de fonctions quasi-périodiques uniformément continues; comme l'on pourrait se demander si ce n'est pas là une propriété caractéristique, j'ai tenu à élucider immédiatement cette question.

Soient $f(x)$ une fonction quasi-périodique continue; $(-k_1, +k_1)$,

---

(1) Ou plus généralement pour toutes les valeurs x d'un domaine *infini*.

(2) On dit que la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$ a pour limite $f(x)$, si pour chaque valeur x_0 la suite $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_\nu(x_0), \ldots$ converge vers $f(x_0)$.

$(-k_2, +k_2), \ldots, (-k_p, +k_p), \ldots$, une suite d'intervalles croissants, et grandissant indéfiniment; $\varphi_1(x)$ une fonction quasi-périodique uniformément continue qui, dans l'intervalle $(-k_1, +k_1)$, coïncide avec $f(x), \ldots$; $\varphi_p(x)$, une fonction quasi-périodique uniformément continue qui, dans l'intervalle $(-k_p, +k_p)$, coïncide avec $f(x)$, etc., ... Posons

$$f_\nu(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)}{\nu}.$$

La fonction $f_\nu(x)$ a pour limite $f(x)$ pour ν infini. Soit, en effet, x une valeur donnée de la variable, $(-k_p, +k_p)$ le plus grand des intervalles qui ne contiennent pas x. On peut écrire, si $\nu > p$,

$$f_\nu(x) = \frac{\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_p(x)}{\nu} + \frac{\nu - p}{\nu(\nu - p)}[\varphi_{p+1}(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)]$$

ou encore, puisque

$$\varphi_{p+1}(x) = \varphi_{p+2}(x) = \ldots = \varphi_\nu(x) = f(x),$$

$$f_\nu(x) = \frac{\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_p(x)}{\nu} + \frac{\nu - p}{\nu} f(x).$$

Lorsque ν augmente indéfiniment, le premier terme qui figure au second membre a pour limite o, le second tend vers $f(x)$; par suite,

$$\lim f_\nu(x) = f(x).$$

Il suit de là que toute fonction quasi-périodique continue est développable en une série convergente pour toute valeur x, dont les termes sont des fonctions quasi-périodiques uniformément continues attachées à un même champ de périodes. On peut même supposer, la démonstration est immédiate, que les termes sont des polynomes en $\cos 2\pi \frac{x}{a_1}, \ldots, \sin 2\pi \frac{x}{a_n}$.

Cette propriété ne caractérise nullement les fonctions quasi-périodiques continues, et nous allons montrer qu'*une fonction continue quelconque*, définie pour toute valeur x, est développable en une série de ce genre.

En effet, soient d'abord $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ des nombres positifs quelconques croissants, et grandissant indéfiniment, $f(x)$ une fonction continue

définie de o à $+\infty$ [1]. Je dis qu'on peut écrire

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x) + \ldots,$$

la série du second membre étant convergente quel que soit x, les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$ étant des fonctions continues périodiques de périodes respectives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. En effet, soit $f_1(x)$ une fonction, continue, périodique de période α_1, qui coïncide avec $f(x)$ dans l'intervalle $\left(o, \frac{\alpha_1}{2}\right)$. Cela est possible puisque $f(x)$ est continue. Posons

$$f(x) = f_1(x) + \varphi_1(x),$$

la fonction $\varphi_1(x)$ étant ainsi une fonction continue bien déterminée, et nulle dans l'intervalle $\left(o, \frac{\alpha_1}{2}\right)$. Soit de même $f_2(x)$ une fonction continue, périodique de période α_2, qui coïncide avec $\varphi_1(x)$ dans l'intervalle $\left(o, \frac{\alpha_2}{2}\right)$; posons

$$\varphi_1(x) = f_2(x) + \varphi_2(x),$$

$\varphi_2(x)$ étant une fonction nulle dans l'intervalle $\left(o, \frac{\alpha_2}{2}\right)$, et ainsi de suite; d'une façon générale on posera

$$\varphi_{\nu-1}(x) = f_\nu(x) + \varphi_\nu(x),$$

$\varphi_\nu(x)$ étant une fonction nulle dans l'intervalle $\left(o, \frac{\alpha_\nu}{2}\right)$. La série

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x) + \ldots$$

est convergente quel que soit x et a pour somme $f(x)$. En effet, x désignant une valeur positive et donnée de la variable, il existe p tel que $\frac{\alpha_{p-1}}{2} \leqq x < \frac{\alpha_p}{2}$. On aura alors, pour $\nu > p$,

$$f(x) - [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\nu(x)] = \varphi_\nu(x) = o,$$

ce qui établit la proposition.

---

(1) La démonstration serait la même si $f(x)$ était définie de $-\infty$ à $+\infty$.

Ceci posé, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des périodes indépendantes. Parmi tous les nombres α donnés par la formule

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ prennent toutes les valeurs entières, il en existe de plus grands [1] que toute quantité donnée A. Si l'on choisit, parmi l'ensemble des nombres α, une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, croissants, grandissant indéfiniment, on peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} f_\nu(x),$$

$f_\nu(x)$ étant une fonction périodique continue de période α_ν. Or, la fonction $f_\nu(x)$ est une fonction quasi-périodique attachée au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, car, si l'on a

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

la fonction

$$f_\nu\left[\alpha_\nu\left(m_1\frac{x_1}{a_1} + m_2\frac{x_2}{a_2} + \ldots + m_n\frac{x_n}{a_n}\right)\right] = \mathrm{F}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de périodes respectives $a_1, a_2, \ldots, a_n$, vérifie l'identité

$$f_\nu(x) = \mathrm{F}_\nu(x, x, \ldots, x).$$

Fonctions quasi-périodiques définies sur un champ de périodes dépendantes. — Nous avons supposé jusqu'ici que les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étaient indépendantes; supposons-les dépendantes et définissant un corps d'ordre p $(p \leqq n)$. Appelons A le champ absolu correspondant.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie pour toute valeur de la variable réelle x. A tout point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ du champ absolu dont ξ est la valeur congrue, nous faisons correspondre la valeur $f(\xi)$ qui définit ainsi sur le

---

[1] En supposant essentiellement que $n > 1$.

champ absolu une fonction bien déterminée $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, périodique de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et vérifiant l'identité

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x).$$

Les définitions de la quasi-périodicité restent les mêmes :

1° *La fonction $f(x)$ est quasi-périodique uniformément continue si la fonction associée* $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *est uniformément continue sur le champ absolu.*

2° *La fonction $f(x)$ est quasi-périodique continue, si la fonction associée* $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *est simplement continue sur le champ absolu.*

Soit alors $b_1, b_2, \ldots, b_q$ un système quelconque de périodes dont le champ B est *équivalent* (p. 96) au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q)$ la fonction associée de $f(x)$ sur le champ B. Je dis qu'au point de vue de la continuité, les fonctions F et Φ ont les mêmes propriétés sur leurs champs respectifs. Supposons la fonction F continue sur A, et soient Q un point quelconque du champ B, ξ la valeur congrue correspondante, P un point *correspondant* de Q dans le champ A. On a

$$(1) \qquad f(\xi) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Phi(\eta_1, \ldots, \eta_q).$$

Étant donné ε, on peut déterminer un domaine D entourant le point P de façon que pour tout point du champ A, compris dans D, on ait

$$|F(\xi'_1, \ldots, \xi'_n) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon.$$

Or, les champs A et B étant équivalents, on peut trouver un domaine D′ entourant le point Q, de façon qu'à *tout* point Q′ du champ B contenu dans D′ on puisse faire correspondre un point P′ du champ A contenu dans D. On aura alors, puisque $F(\xi'_1, \ldots, \xi'_n) = \Phi(\eta'_1, \ldots, \eta'_q)$,

$$|\Phi(\eta'_1, \ldots, \eta'_q) - F(\xi_1, \ldots, \xi_n)| < \varepsilon$$

ou enfin, à cause de (1),

$$|\Phi(\eta'_1, \ldots, \eta'_q) - \Phi(\eta_1, \ldots, \eta_q)| < \varepsilon;$$

la fonction Φ est continue sur B. Il est clair que, si F est uniformément continue sur A, Φ est uniformément continue sur le champ B.

Ainsi toute fonction quasi-périodique attachée à un champ donné est fonction quasi-périodique de même nature sur tous les champs équivalents.

Comme il existe des champs de périodes indépendantes équivalents à un champ donné quelconque, on voit en définitive qu'il n'y a pas de distinction essentielle à faire entre les fonctions quasi-périodiques continues définies sur un champ de périodes dépendantes, et celles qui sont définies sur des champs de périodes indépendantes.

L'ensemble des fonctions quasi-périodiques continues attachées à un champ déterminé coïncide avec celui des fonctions quasi-périodiques continues attachées à un champ équivalent quelconque défini par des périodes indépendantes ou non. On aperçoit maintenant la raison de la définition que nous avons donnée (p. 96) des champs équivalents.

Le même procédé de démonstration montre que *toute fonction quasi-périodique définie sur un champ donné reste quasi-périodique de même nature sur tout champ multiple* (p. 108) *du champ donné;* mais l'inverse n'a plus lieu nécessairement.

CHAMPS ABSOLUS ATTACHÉS A UNE MÊME FONCTION QUASI-PÉRIODIQUE.

Nous allons nous placer maintenant à un point de vue différent et, pour ainsi dire, inverse du précédent. Au lieu d'envisager l'ensemble des fonctions quasi-périodiques continues attachées à un champ donné, et par suite à tous les champs équivalents, nous rechercherons au contraire l'ensemble des champs absolus sur lesquels une *même fonction* garde sa propriété d'être quasi-périodique continue. Cet ensemble comprend, évidemment, tous les champs équivalents et tous les multiples du champ sur lequel la fonction est primitivement définie comme quasi-périodique continue; mais il peut en comprendre d'autres.

Tel est le problème que je me propose de traiter, et c'est ici que j'aurai à me servir des théorèmes obtenus dans la première Partie, dont le principal objet était précisément l'étude de cette question.

On peut toujours supposer que le champ primitivement donné est défini par un système de périodes indépendantes, sinon on le remplacerait par un champ équivalent satisfaisant à cette condition.

Je traiterai d'abord complètement le cas des fonctions quasi-périodiques uniformément continues, pour montrer ensuite comment les résultats obtenus s'étendent aux fonctions quasi-périodiques simplement continues.

Voici, d'une façon précise, comment se pose le problème :

Étant donnée une fonction quasi-périodique $f(x)$, uniformément continue sur un champ donné de périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, trouver tous les systèmes de périodes sur le champ desquelles la même fonction $f(x)$ reste quasi-périodique uniformément continue.

La question sera complètement résolue lorsque nous aurons obtenu tous les systèmes de périodes indépendantes dont le champ satisfait aux conditions du problème; l'ensemble de leurs systèmes équivalents (à périodes indépendantes ou non) fournira ensuite la solution générale.

Soit donc $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la fonction continue définie pour toutes les valeurs des variables, périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et prenant, en chaque point du champ absolu défini par les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la valeur de la fonction associée $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Pour ne pas compliquer outre mesure le langage, je donnerai également à $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le nom de fonction associée de $f(x)$ sur le champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

La fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *n'est pas nécessairement irréductible.* Supposons-la réductible à p variables par une substitution linéaire convenable, qui la transforme en une fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Nous pouvons, étant choisies [1] arbitrairement p périodes propres quelconques de la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [2], déterminer la substitution, de façon que les p périodes choisies deviennent dans Φ des périodes dirigées suivant les axes. Nous avons montré que ces substitutions sont de la

---

(1) Pages 38-41 et 45-48.

(2) Nous supposons que F n'est constante par rapport à aucune variable, sinon, si elle ne dépendait pas de x_n par exemple, on raisonnerait sur les seules périodes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_1}{b_1} = \mu_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{x_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_p}{b_p} = \mu_1^p \dfrac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \dfrac{x_n}{a_n}, \end{cases}$$

les coefficients μ_j^i étant des nombres rationnels, les périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$ restant arbitraires. Si, en particulier, on détermine $b_1, b_2, \ldots, b_p$ par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{b_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n}, \end{cases}$$

ce qui est possible puisque les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, on voit que :

1° La fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ continue, périodique en $y_1, y_2, \ldots, y_p$, de périodes respectives $b_1, b_2, \ldots, b_p$, vérifie, quel que soit x, l'identité

$$f(x) = \mathrm{F}(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, x, \ldots, x);$$

2° Les périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont indépendantes.

La fonction quasi-périodique $f(x)$ peut donc être considérée comme attachée au champ des périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Tous les systèmes de périodes b obtenus de cette façon jouissent de la même propriété ; à tout système de p périodes propres, choisies arbitrairement dans F, correspond un système de périodes $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

Parmi ces systèmes, il en est qui jouissent de propriétés fondamentales. Supposons que l'on choisisse dans F, p périodes propres formant un système minimum S ; les coefficients μ_j^i des formules (1) et (2) sont alors entiers. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les périodes obtenues dans ce cas par les formules (2), et soit $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ la fonction irréductible obtenue dans le même cas par les formules (1) [1]. Cette fonction, associée de $f(x)$ sur le

[1] Dans ces formules, les lettres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ doivent être remplacées par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

champ des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, admet les périodes $(\alpha_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \alpha_2, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, \alpha_p)$ qui forment elles aussi un système minimum. Si l'on choisit dans F un autre système minimum S′, on obtient, par le même procédé, un autre système de périodes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, et une fonction $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ associée de $f(x)$ sur le champ des périodes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$; on a de plus, entre les périodes α et β, des relations de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\beta_1} = \dfrac{\nu_1^1}{\alpha_1} + \dfrac{\nu_2^1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{\nu_p^1}{\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{\beta_p} = \dfrac{\nu_1^p}{\alpha_1} + \dfrac{\nu_2^p}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{\nu_p^p}{\alpha_p}, \end{array}\right.$$

dans lesquelles les coefficients ν_i^j sont des entiers satisfaisant à la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_1^1 & \nu_2^1 & \ldots & \nu_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^p & \nu_2^p & \ldots & \nu_p^p \end{vmatrix} = \pm 1;$$

enfin on passe de la fonction $\Phi(y_1, \ldots, y_p)$ à la fonction $\Psi(z_1, \ldots, z_p)$ par les formes linéaires adjointes aux relations (3)

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{z_1}{\beta_1} = \nu_1^1 \dfrac{y_1}{\alpha_1} + \ldots + \nu_p^1 \dfrac{y_p}{\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{z_p}{\beta_p} = \nu_1^p \dfrac{y_1}{\alpha_1} + \ldots + \nu_p^p \dfrac{y_p}{\alpha_p}. \end{array}\right.$$

Tous ces résultats découlent directement des propriétés établies pages 38-41 et 45-49. Il en résulte d'ailleurs, ce que nous savions déjà, que tous les systèmes de périodes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, obtenus à la façon indiquée par les formules (3), sous la seule condition $\Delta = \pm 1$, définissent des champs de périodes attachés à la fonction $f(x)$.

Ainsi, *partant d'un champ donné sur lequel la fonction $f(x)$ est primitivement définie comme quasi-périodique uniformément continue, nous arrivons à déterminer un corps réduit défini par la base $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ (voir* p. 77), *et tel que toute base $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, choisie arbi-*

trairement dans ce corps, définit un champ de périodes attaché à $f(x)$; les fonctions associées correspondantes sont d'une part irréductibles, d'autre part rapportées à des systèmes minimum de périodes.

On remarquera que $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ s'exprimant par des fonctions linéaires à coefficients entiers de $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, *le champ défini par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un multiple du champ défini par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$* (p. 110).

Pour caractériser complètement le corps réduit ainsi obtenu, il faut montrer qu'il ne dépend pas du système initial de périodes qui a servi à le déterminer, propriété qui résultera du théorème suivant :

Si deux fonctions périodiques irréductibles $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_q)$, rapportées à des systèmes minimum de périodes, sont les associées d'une même fonction quasi-périodique uniformément continue $f(x)$, sur les champs définis respectivement par les deux systèmes de périodes indépendantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$:

1° *$q = p$, et les systèmes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, sont deux bases d'un même corps réduit, en d'autres termes, les champs $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ sont équivalents.*

2° *Les fonctions Φ et Ψ se déduisent l'une de l'autre par les formes linéaires adjointes aux relations de dépendance qui lient les périodes α aux périodes β.*

La proposition serait établie si l'on pouvait montrer que les fonctions Φ et Ψ proviennent par réduction linéaire d'une *même* fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à périodes indépendantes.

Or, désignons par A le champ absolu défini par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, par B le champ absolu défini par $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, et soit C le champ résultant de A et B, c'est-à-dire celui qui est déterminé par le système total des périodes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. Le champ C étant un multiple commun à A et B, il en résulte que $f(x)$ est une fonction quasi-périodique uniformément continue sur C. Désignons enfin par Γ un champ équivalent à C, défini par les périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La fonction $f(x)$ est quasi-périodique uniformément continue sur Γ. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son associée sur ce champ.

Le champ C étant équivalent à Γ, on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n} \end{array}\right\} \quad \mu_i^j \text{ entiers;}$$

de même

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\beta_1} = \dfrac{\nu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\nu_n^1}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\beta_q} = \dfrac{\nu_1^q}{a_1} + \ldots + \dfrac{\nu^q}{a_n} \end{array}\right\} \quad \nu_i^j \text{ entiers.}$$

Ceci posé, considérons la fonction

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left[\alpha_1\left(\mu_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{x_n}{a_n}\right), \ldots, \alpha_p\left(\mu_1^p \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \frac{x_n}{a_n}\right)\right];$$

elle est définie pour toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables, continue, périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de périodes *indépendantes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et vérifie de plus l'identité

$$F_1(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, x, \ldots, x) = f(x).$$

Par conséquent F_1 coïncide ([1]) avec $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On en conclut que $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ résulte de F par réduction linéaire; le même raisonnement conduit à la même conclusion pour la fonction $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_q)$, ce qui démontre complètement la proposition.

Le corps réduit défini par la base $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est donc bien défini. C'est le CORPS RÉDUIT FONDAMENTAL ATTACHÉ A LA FONCTION $f(x)$. Son ordre p s'appellera *l'ordre de quasi-périodicité de la fonction* $f(x)$.

L'ordre p est un entier qui, au point de vue de la périodicité, caractérise essentiellement la fonction $f(x)$. Si $p = 1$ on retombe sur la périodicité ordinaire. On peut dire encore que *p est le plus petit nombre de périodes, sur le champ desquelles la fonction soit uniformément continue. Si l'on*

([1]) Page 117.

choisit une base quelconque de p périodes dans le corps réduit fondamental, la fonction $f(x)$ est quasi-périodique uniformément continue sur le champ de ces périodes; la fonction associée correspondante est d'une part irréductible, d'autre part rapportée à un système minimum de périodes.

On peut énoncer maintenant la proposition générale suivante :

L'ensemble des champs attachés à une même fonction quasi-périodique uniformément continue est formé par l'ensemble des champs équivalents ou multiples de ceux définis par les bases du corps réduit fondamental.

Par conséquent, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des périodes *quelconques*, indépendantes ou non, dont le champ est attaché à $f(x)$, et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les périodes d'une base quelconque du corps fondamental, on a entre ces diverses périodes des relations de la forme

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n}, \end{array}\right.$$

où les coefficients μ_i^j sont *entiers* et ne sont assujettis d'autre part à aucune condition particulière si ce n'est que dans le Tableau formé avec ces coefficients doit exister un déterminant d'ordre p différent de o. Il faut entendre par là que les coefficients entiers μ_i^j étant, sous cette condition, arbitrairement choisis, si l'on résout les relations (5) par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le champ défini par les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ainsi déterminées est attaché à la fonction $f(x)$.

Faisons enfin la remarque suivante : Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un système de périodes dont le champ est attaché à $f(x)$, mais, à part cela, quelconques, indépendantes ou non. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ une base du corps fondamental, liée aux a par les formules (5), désignons de plus par $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ l'associée de $f(x)$ sur le champ des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Considérons alors la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left[\alpha_1\left(\mu_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{x_n}{a_n}\right), \ldots, \alpha_p\left(\mu_1^p \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \frac{x_n}{a_n}\right)\right];$$

c'est une fonction continue, définie pour *toutes* les valeurs des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, périodique en x_1 de période a_1, en x_2 de période a_2, etc. et vérifiant de plus, pour toute valeur x, l'identité

$$F(x, x, \ldots, x) = f(x).$$

Nous retrouvons ici, par un procédé tout à fait différent, un théorème de M. Bohl d'après lequel, en employant notre langage, si $f(x)$ est une fonction quasi-périodique uniformément continue sur le champ des périodes a_1, $a_2, \ldots, a_n$ qui peuvent être dépendantes [1], il existe une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue et définie pour *toutes* les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, périodique de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et satisfaisant à l'identité

$$F(x, x, \ldots, x) = f(x).$$

Si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dépendantes, il existe une infinité de fonctions répondant à la question; celles que nous obtenons sont réductibles, mais il y en a d'irréductibles, et il serait bien facile d'obtenir leur forme générale.

Cela nous conduit à une autre remarque qui a son importance : Si a_1, $a_2, \ldots, a_n$ sont des périodes dépendantes, et si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction continue définie pour toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, périodique et de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la fonction

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x)$$

est quasi-périodique uniformément continue, mais son ordre n'est pas égal à n, bien que la fonction F puisse être irréductible. Pour obtenir dans ce cas l'ordre de $f(x)$, il faudrait d'abord remplacer les périodes $a_1, a_2, \ldots. a_n$ par des périodes équivalentes et *indépendantes* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(m < n)$.

---

[1] Si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ coïncide avec l'associée de $f(x)$ sur le champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$; elle est donc unique dans ce cas.

Nous savons que l'on a (p. 107)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{\nu_1^1}{b_1} + \ldots + \dfrac{\nu_m^1}{b_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{\nu_1^n}{b_1} + \ldots + \dfrac{\nu_m^n}{b_m} \end{array}\right\} \quad \nu_i^j \text{ entiers.}$$

Considérant alors la fonction

$$\Phi(y_1, \ldots, y_m) = \mathrm{F}\left[a_1\left(\nu_1^1 \frac{y_1}{b_1} + \ldots + \nu_m^1 \frac{y_m}{b_m}\right), \ldots, a_n\left(\nu_1^n \frac{y_1}{b_1} + \ldots + \nu_m^n \frac{y_m}{b_m}\right)\right],$$

on voit que Φ est l'associée de $f(x)$ sur le champ des périodes *indépendantes* $b_1, b_2, \ldots, b_m$. C'est en effectuant maintenant la réduction de $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$, si elle est possible, qu'on obtiendra l'ordre de la fonction $f(x)$. En particulier, si la fonction $\mathrm{F}(x, x, \ldots, x) = f(x)$ est nulle quel que soit x, la fonction correspondante $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$ doit être nulle quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $y_1, \ldots, y_m$, et cela nous donnerait la forme générale des fonctions $\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)$ que nous considérions un peu plus haut.

Nous nous sommes placés jusqu'ici dans le cas des fonctions quasi-périodiques uniformément continues, mais les résultats obtenus s'appliquent sans restriction aux fonctions quasi-périodiques simplement continues, et cela, en vertu de l'extension des propriétés des fonctions périodiques de plusieurs variables aux fonctions périodiques définies et continues sur un champ dense.

Étant donnée la fonction $f(x)$ quasi-périodique simplement continue sur un champ donné A de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que l'on peut toujours supposer indépendantes, on se propose de déterminer tous les champs sur lesquels la même fonction $f(x)$ est quasi-périodique continue.

Soit $\mathrm{F}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ l'associée de $f(x)$ sur le champ absolu A. La fonction $\mathrm{F}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ peut être réductible, en donnant à ce mot le sens précis que nous lui avons attribué (p. 65). D'une façon générale, supposons-la réductible à l'ordre p. On peut alors, étant choisies dans F

p périodes propres, distinctes mais quelconques, trouver une substitution

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\eta_1}{b_1} = \mu_1^1 \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{\xi_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\eta_p}{b_p} = \mu_1^p \dfrac{\xi_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \dfrac{\xi_n}{a_n} \end{array}\right.$$

qui transforme la fonction $F(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ en une fonction irréductible $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ définie et continue sur le champ B transformé de A par les formules (6), et admettant les périodes de coordonnées $(b_1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, b_2, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, b_p)$. Les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ restant arbitraires, on peut les déterminer par les relations

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{b_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n}. \end{array}$$

Quel est alors le champ B transformé de A par les formules (6)?

Le point de coordonnées $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_p = \xi$ appartient à B quel que soit ξ et correspond dans A au point $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = \xi$. D'autre part, la fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ est périodique en $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, ce qui exige, et c'est là *une conséquence de la définition de la réductibilité*, que le champ B soit aussi périodique en $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$; d'où résulte, en définitive, que le point de coordonnées

$$\xi + n_1 b_1, \quad \xi + n_2 b_2, \quad \ldots, \quad \xi + n_p b_p$$

appartient au champ B, quels que soient ξ et les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$, ou enfin que le champ B est précisément le champ absolu défini par les périodes indépendantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$. La fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ étant continue sur ce champ, ce dernier est donc attaché à la fonction $f(x)$.

Si maintenant on choisit dans $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des systèmes minimum de périodes propres, on arrivera à la définition du corps réduit fondamental. A partir de ce moment le raisonnement devient en tout point identique à celui que nous avons suivi pour les fonctions uniformément continues, et

les résultats obtenus leur sont applicables sans restriction. Nous aurons finalement ce théorème :

L'ensemble des champs attachés à une même fonction quasi-périodique continue (uniformément ou simplement continue) se compose des champs équivalents ou multiples de ceux définis par les bases du corps réduit fondamental.

Il est à peine utile d'observer qu'une fonction quasi-périodique continue garde la même nature sur tous les champs qui lui sont attachés; en d'autres termes, il est impossible qu'elle soit uniformément continue sur l'un des champs, et simplement continue sur un autre.

Vis-à-vis des fonctions quasi-périodiques simplement continues, on peut faire une remarque analogue à celle que nous avons indiquée à propos des fonctions uniformément continues. Soient A le champ des périodes *dépendantes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sur lequel la fonction $f(x)$ est quasi-périodique simplement continue et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ une base du corps fondamental définissant le champ absolu B. Appelons $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ l'*associée* de $f(x)$ sur le champ B. Nous avons entre les nombres a et α des relations de la forme

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \dfrac{\mu_2^1}{a_2} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n} \end{array}\right\} \quad \mu_i^j \text{ entiers.}$$

Considérons maintenant l'ensemble C des points $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dans l'espace à n dimensions, assujettis à cette condition que les nombres

$$(8) \quad \alpha_1\left(\mu_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{x_n}{a_n}\right), \quad \alpha_2\left(\mu_1^2 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^2 \frac{x_n}{a_n}\right), \quad \ldots, \quad \alpha_p\left(\mu_1^p \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \frac{x_n}{a_n}\right)$$

soient les coordonnées d'un point $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ du champ absolu B, et au point P faisons correspondre la valeur $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ qui définit ainsi sur l'ensemble C une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tout point P dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes égales à x, appartient, quel que soit x, à l'ensemble C, et l'on a évidemment

$$F(x, x, \ldots, x) = \Phi(x, \ldots, x) = f(x).$$

De plus l'ensemble C est manifestement périodique, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En tous les points P dont les coordonnées diffèrent de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivement d'un nombre entier de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la fonction F a la même valeur. Enfin l'ensemble C contient le champ absolu A défini par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et la fonction F prend en tout point de A la valeur $f(\xi)$, ξ désignant la valeur congrue correspondante. Mais le champ C comprend en outre des points qui n'appartiennent pas à A. Il est facile de voir que C est dense dans tout domaine à n dimensions. Soient en effet $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ un système de valeurs quelconques, et $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$ les valeurs correspondantes des quantités (8). Les équations

$$\frac{\eta_1}{\alpha_1} = \mu_1^1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^1 \frac{x_n}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\eta_p}{\alpha_p} = \mu_1^p \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \mu_n^p \frac{x_n}{a_n}$$

peuvent être résolues par rapport à p des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puisque dans le Tableau des μ il y a au moins un déterminant d'ordre p différent de o. L'on pourra écrire par exemple

$$\frac{x_1}{a_1} = \nu_1^1 \frac{\eta_1}{\alpha_1} + \ldots + \nu_p^1 \frac{\eta_p}{\alpha_p} + \nu_{p+1}^1 \frac{x_{p+1}}{a_{p+1}} + \ldots + \nu_n^1 \frac{x_n}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x_p}{a_p} = \nu_1^p \frac{\eta_1}{\alpha_1} + \ldots + \nu_p^p \frac{\eta_p}{\alpha_p} + \nu_{p+1}^p \frac{x_{p+1}}{a_{p+1}} + \ldots + \nu_n^p \frac{x_n}{a_n},$$

les coefficients ν_i^j étant rationnels. On obtiendra tous les points de l'ensemble C en donnant à $x_{p+1}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires, en prenant pour $\eta_1, \ldots, \eta_p$ les coordonnées d'un point quelconque du champ B, et en déterminant $x_1, \ldots, x_p$ par les formules précédentes. Remarquons que les nombres $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_p^0$ sont liés par les mêmes formules. Par conséquent, si l'on prend pour $x_{p+1}, \ldots, x_n$ des valeurs quelconques, voisines respectivement de $x_{p+1}^0, \ldots, x_n^0$, et pour $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ les coordonnées d'un point du champ B voisin du point $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$, ce qui est possible puisque les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont indépendantes, on obtient, au moyen des formules précédentes, des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ voisines

de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$. En définitive il existe des points de l'ensemble C dont les coordonnées sont aussi voisines qu'on le veut des nombres arbitrairement choisis $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, ce qui établit la proposition. Si $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ est continue sur B, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue sur C. Si la fonction $\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ est uniformément continue sur B, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est aussi uniformément continue sur l'ensemble C; il existe dans ce cas une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie pour toutes les valeurs des variables continue et périodique telle que

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x);$$

on retombe ici sur une proposition déjà établie pour les fonctions quasi-périodiques uniformément continues.

CHAMPS ABSOLUS ATTACHÉS SIMULTANÉMENT A PLUSIEURS FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES.

Le problème de la recherche des champs de périodes attachés à une même fonction se pose de la même façon pour un nombre fini de fonctions quasi-périodiques continues et données.

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$, q fonctions quasi-périodiques continues (uniformément continues ou simplement continues) définies respectivement sur les champs $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Existe-t-il un champ R sur lequel les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ soient simultanément quasi-périodiques continues? On voit immédiatement qu'il en existe une infinité, et en particulier tous les champs multiples communs des champs $A_1, A_2, \ldots, A_q$. On peut toujours supposer que $A_1, A_2, \ldots, A_q$ sont des champs de périodes indépendantes, obtenues en prenant une base dans chacun des corps fondamentaux attachés respectivement à $f_1, f_2, \ldots, f_q$. Soit R le champ résultant des champs $A_1, A_2, \ldots, A_q$, ou un champ équivalent quelconque. Les champs sur lesquels les fonctions $f_1, \ldots, f_q$ sont simultanément continues sont nécessairement, d'après les résultats obtenus pour une seule fonction quasi-périodique, des multiples communs à $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Ce sont donc, ou bien des champs équivalents à R, ou bien des multiples de R (p. 111). Si le champ résultant R n'est pas directement défini par des périodes indépendantes, nous lui substituerons un champ satisfaisant à cette condition. Soient α_1,

$\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les périodes indépendantes ainsi obtenues. Tous les systèmes de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont les champs sont attachés simultanément aux fonctions f, s'obtiennent alors par des formules de la forme

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\mu_1^1}{a_1} + \frac{\mu_2^1}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n^1}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{\alpha_p} = \frac{\mu_1^p}{a_1} + \frac{\mu_2^p}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n^p}{a_n},$$

où les coefficients μ_i^j sont *entiers*, assujettis à cette seule condition qu'il existe dans le Tableau qui les contient un déterminant d'ordre p différent de o. La conclusion devient identique à celle obtenue dans le cas d'une seule fonction. Le nombre n est nécessairement supérieur à p et, ici encore, il existe un nombre minimum de périodes, qui peuvent être considérées comme appartenant simultanément aux q fonctions données.

DÉRIVÉE ET INTÉGRALE D'UNE FONCTION QUASI-PÉRIODIQUE CONTINUE.

Dérivée. — Une fonction quasi-périodique continue n'a pas nécessairement de dérivée pour toute valeur x, ou bien, si cette dérivée existe quel que soit x, elle n'est pas nécessairement continue. Dans ces deux cas il n'y a pas lieu de se demander si la dérivée est quasi-périodique continue.

Mais même lorsqu'il existe, pour toute valeur x, une dérivée continue, celle-ci n'est pas nécessairement une fonction quasi-périodique continue. Cela tient à ce que la quasi-périodicité est une propriété fonctionnelle ne s'exprimant par aucune relation explicite, et qu'on ne peut donc différentier. Considérée dans un intervalle donné, la fonction repasse dans d'autres intervalles par la même série de valeurs, avec une approximation aussi petite que l'on veut, il est vrai, mais qui, par le fait qu'elle n'est pas nulle, laisse à la dérivée une allure quelconque, au moins dans une certaine mesure.

Pour les fonctions quasi-périodiques uniformément continues la question est au fond identique à la suivante : Une fonction continue [1] de plusieurs

---

[1] Continue par rapport à l'ensemble des variables.

variables $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ continue par rapport à la seule variable x_1; s'ensuit-il que cette dérivée soit continue par rapport aux autres variables? Évidemment non. Par exemple la fonction $\Phi(x, y)$ égale à $y \sin \frac{x}{y}$ pour $y \neq 0$ et à 0 pour $y = 0$ est une fonction continue par rapport à l'ensemble x, y, dont la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \cos \frac{x}{y}$ est continue par rapport à x sans l'être par rapport à y.

Nous indiquerons toutefois une condition suffisante pour assurer la quasi-périodicité de la dérivée d'une fonction quasi-périodique uniformément continue ou simplement continue, et qui s'appliquera dans la plus grande généralité des cas. Cette condition est la suivante :

Si la fonction

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tend uniformément vers $f'(x)$ pour $h = 0$, la dérivée $f'(x)$ est une fonction quasi-périodique continue de même nature que $f(x)$ (¹).

En disant que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend uniformément vers $f'(x)$, nous entendons par là qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$, de façon que sous la seule condition

$$|h| < \delta$$

on ait

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

et cela pour *toutes les valeurs x*. Cette proposition résultera immédiatement de la suivante qui est plus générale.

Soit A un champ absolu de périodes indépendantes, F une fonction continue définie sur A [pour simplifier l'écriture nous appellerons F(P) la valeur de la fonction au point P]. Supposons maintenant que la fonction F dépende d'un paramètre h [nous l'écrirons F(P, h)] et que, pour $h = 0$,

(¹) C'est-à-dire que si $f(x)$ est quasi-périodique uniformément continue, $f'(x)$ est aussi quasi-périodique uniformément continue.

elle ait une limite $\Phi(P)$. Par hypothèse, la fonction $F(P, h)$ est, quel que soit $h \neq 0$, continue sur le champ A; elle définit donc pour chaque valeur h une fonction quasi-périodique continue. Je dis que si $F(P, h)$ tend uniformément vers $\Phi(P)$ pour tous les points du champ absolu A, $\Phi(P)$ est continue sur A et définit ainsi une fonction quasi-périodique continue.

Étant donné ε, on peut déterminer δ de façon que l'on ait, pour tout point P du champ A,

$$|F(P, h) - \Phi(P)| < \varepsilon,$$

lorsque

$$|h| < \delta.$$

Donnons à h une valeur *fixe* satisfaisant à cette dernière inégalité, et soit P un point fixe du champ A. Nous pouvons déterminer un domaine D entourant P, de façon que, pour tout point P′ pris dans ce domaine, on ait

$$|F(P', h) - F(P, h)| < \varepsilon;$$

comme l'on a d'autre part

$$|F(P', h) - \Phi(P')| < \varepsilon,$$

on en conclut

$$|\Phi(P') - \Phi(P)| < 3\varepsilon;$$

ce qui établit la proposition. Il y a plus : si la fonction $F(P, h)$ est, quel que soit $h \neq 0$, uniformément continue sur le champ A, la limite $\Phi(P)$ est aussi uniformément continue; en effet les inégalités précédentes ont lieu alors, quels que soient P, P′, pourvu qu'ils soient assez voisins pour vérifier l'inégalité

$$|F(P', h) - F(P, h)| < \varepsilon,$$

h étant une valeur fixe inférieure en module à δ. En résumé :

La limite d'une fonction quasi-périodique continue, lorsque cette limite a lieu uniformément, est une fonction quasi-périodique continue. Si la fonction quasi-périodique variable est uniformément continue, la fonction limite est aussi quasi-périodique uniformément continue.

En ce qui concerne la dérivée d'une fonction quasi-périodique continue la proposition énoncée plus haut est établie. En effet, la fonction quasi-

périodique dépendant du paramètre h,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend uniformément vers $f'(x)$ qui est par suite quasi-périodique continue; si $f(x)$ est uniformément continue, il en est de même de $f'(x)$.

Un cas particulier du précédent est celui où la fonction $f'(x)$, supposée exister pour toute valeur x, est uniformément continue pour toutes les valeurs de la variable x; en d'autres termes, étant donné ε, on peut déterminer δ de façon que, pour toute valeur k de module inférieur à δ, on ait

$$|f'(x+k)-f'(x)|<\varepsilon,$$

et cela *quel que soit* x. On peut écrire, en effet,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1),$$

par suite,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=f'(x+\theta h)-f'(x);$$

si donc $|h|<\delta$, on aura, quel que soit x,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

et nous nous trouvons bien dans les conditions précédentes.

En remarquant que la continuité uniforme de $f'(x)$, pour toutes les valeurs x, est nécessaire pour que $f'(x)$ soit une fonction quasi-périodique uniformément continue, on peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction quasi-périodique uniformément continue $f(x)$ soit elle-même une fonction quasi-périodique uniformément continue est que $f'(x)$ possède la continuité uniforme relativement à l'ensemble des valeurs x.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'associée de $f(x)$ sur le champ total. Si F admet des dérivées partielles continues, la fonction

$$F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}$$

est l'associée, sur le même champ, de la dérivée $f'(x)$ qui est quasi-périodique uniformément continue.

Dans tous les cas, et c'est là une propriété d'une grande importance, si $f(x)$, *fonction quasi-périodique continue, admet une dérivée quasi-périodique continue* $f'(x)$, *les deux fonctions* f *et* f' *ont le même ordre de quasi-périodicité;* tout champ de périodes attaché à l'une de ces fonctions est attaché à l'autre, en un mot *ces deux fonctions ont le même corps fondamental de périodes.*

Cela résulte immédiatement du fait que toute période de la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ appartient à la fonction

$$F'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \lim_{h=0} \frac{F(\xi_1 + h, \xi_2 + h, \ldots, \xi_n + h) - F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{h}.$$

Cette propriété a été établie directement pages 51-53 pour les fonctions définies sur un champ continu, et s'étend sans difficulté aux fonctions continues sur des champs de périodes indépendantes.

On en conclut en particulier cette proposition : si $F(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction continue *irréductible* périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *à périodes indépendantes,* admettant des dérivées partielles continues, la fonction $\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}$ est également irréductible.

Intégrale d'une fonction quasi-périodique continue. — Soit $f(x)$ une fonction quasi-périodique continue. L'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

n'est pas nécessairement quasi-périodique et elle ne l'est pas en général.

Soit $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un point du champ absolu, ξ sa valeur congrue; l'associé $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de $\varphi(x)$ sur le champ des périodes a pour valeur en P

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_0^\xi f(x)\,dx.$$

Pour que $\varphi(x)$ soit quasi-périodique, il faut que la différence

$$\Phi(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n) - \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_{\xi}^{\xi'} f(x)\,dx$$

devienne infiniment petite lorsque le point $P'(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ se rapproche indéfiniment du point P, c'est-à-dire lorsque, ξ restant fixe, les quantités

$$\frac{\xi'-\xi}{a_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\xi'-\xi}{a_n}$$

sont voisines de nombres entiers; et, pour que $\varphi(x)$ soit quasi-périodique uniformément continue, il faut et il suffit que la même intégrale $\int_{\xi}^{\xi'} f(x)\,dx$ devienne infiniment petite lorsque $\frac{\xi'-\xi}{a_1}, \ldots, \frac{\xi'-\xi}{a_n}$ sont voisins de nombres entiers, ξ et ξ' ayant, à part cette condition, des valeurs quelconques.

Il est facile de se rendre compte que si l'intégrale d'une fonction quasi-périodique n'est pas nécessairement quasi-périodique, ce fait peut tenir à des circonstances très différentes.

Envisageons en particulier une fonction quasi-périodique uniformément continue $f(x)$, et soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son associée sur le champ total des périodes. Si l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

est quasi-périodique uniformément continue, et si $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est son associée sur le champ total, la quantité

$$\frac{R(x_1+h, x_2+h, \ldots, x_n+h) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

a pour limite $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lorsque h tend vers o. Or une condition [1] nécessaire, pour qu'il existe une telle fonction R, est que

$$K = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \cdots \int_0^{a_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

---

[1] Pages 54-62.

ou encore, comme il est facile de le voir,

$$K = \lim \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx = 0 \qquad \text{pour } x = \infty.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, l'intégrale n'est pas quasi-périodique. Mais, même lorsque K est nul, l'intégrale n'est pas nécessairement quasi-périodique uniformément continue, puisque, comme nous l'avons vu page 60, l'existence de l'intégrale $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'est pas assurée.

Dans une lettre que j'ai reçue récemment, M. Bohl a bien voulu me communiquer le résultat suivant [1] :

Si l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

est bornée, c'est-à-dire $|\varphi(x)| < A$, *elle est développable en série uniformément convergente, dont le terme général* u_ν *est un polynome en*

$$\cos 2\pi\frac{x}{a_1}, \quad \ldots, \quad \cos 2\pi\frac{x}{a_n}; \quad \sin 2\pi\frac{x}{a_1}, \quad \ldots, \quad \sin 2\pi\frac{x}{a_n};$$

en d'autres termes, $\varphi(x)$ est une fonction quasi-périodique uniformément continue. La condition est d'ailleurs manifestement nécessaire.

Il résulte de là que si l'on considère les fonctions $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{h=0} \frac{R(x_1+h, \ldots, x_n+h) - R(x_1, \ldots, x_n)}{h} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ou, si l'on veut, bien que le problème soit un peu moins général, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

F étant une fonction continue périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à périodes *indépendantes,* avec $K = 0$, aucune de ces fonctions R n'est bornée, lorsqu'il

---

[1] Ce résultat n'a pas encore été publié.

n'en existe pas de périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et s'il existe une intégrale R bornée, il en existe une de périodique.

En général il arrivera que si $\varphi(x)$ n'est pas quasi-périodique, la fonction

$$\psi(x) = \int_0^x [f(x) - \mathrm{K}]\, dx$$

est quasi-périodique uniformément continue ; c'est, pour ainsi dire, la partie quasi-périodique de l'intégrale qui se met alors sous la forme

$$\varphi(x) = \mathrm{K}x + \psi(x).$$

Dans tous les cas, lorsque l'intégrale d'une fonction quasi-périodique uniformément continue ou simplement continue $f(x)$ est elle-même une fonction quasi-périodique continue, l'ordre de cette dernière est égal à celui de $f(x)$, le corps fondamental des périodes attaché à l'intégrale est le même que celui de la fonction $f(x)$.

Plus généralement si l'intégrale se met sous la forme $\mathrm{K}x + \psi(x)$ où ψ désigne une fonction quasi-périodique continue, les fonctions f et ψ ont le même corps fondamental de périodes. En effet, d'après ce qui a été dit sur les dérivées, le corps fondamental de la fonction $\psi'(x) = f(x) - \mathrm{K}$, qui est celui de $f(x)$, coïncide avec le corps fondamental attaché à $\psi(x)$.

En définitive, on peut résumer en disant que :

Ni la dérivation, ni l'intégration, lorsqu'elles conservent la quasi-périodicité, ne modifient les champs de périodes attachés à une fonction quasi-périodique.

LES FONCTIONS DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Soit $\mathrm{F}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction continue des variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si l'on remplace les variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ respectivement par les fonctions quasi-périodiques continues $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, la fonction

$$f(x) = \mathrm{F}[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

est elle-même une fonction quasi-périodique continue. En effet, en dési-

gnant par

$$w_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p), \quad w_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q), \quad \ldots$$

les fonctions associées de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sur leurs champs respectifs $A_1, A_2, \ldots$, la fonction

$$F[w_1(\xi_1, \ldots, \xi_p), w_2(\eta_1, \ldots, \eta_q), \ldots] = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q, \ldots)$$

est l'associée de $f(x)$ sur le champ résultant de $A_1, A_2, \ldots$; de plus, est continue sur ce champ. Il résulte de là que l'ordre de $f(x)$ est au plus égal à l'ordre du champ résultant, mais peut lui être inférieur; il faudrait, pour déterminer l'ordre exactement, étudier la réductibilité de la fonction Φ.

Considérons en particulier le cas *où les fonctions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *sont des fonctions continues simplement périodiques.* La fonction

$$f(x) = F[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

est alors une fonction quasi-périodique uniformément continue.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les périodes respectives des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Nous avons montré dans la première Partie que la fonction $F[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)]$ est irréductible. Par conséquent, *si les périodes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont indépendantes, l'ordre de la fonction* $f(x)$ *est exactement égal à* n.

Il faut remarquer que les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, supposées indépendantes, ne forment pas nécessairement une base du corps fondamental attaché à $f(x)$, et cela peut tenir à des raisons différentes. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que les périodes $(a_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, a_n)$ de la fonction

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)]$$

formassent un système minimum; cela exigerait en particulier que, pour certaines valeurs fixes attribuées par exemple à $x_2, x_3, \ldots, x_n$, la fonction de la seule variable x_1, $\Phi(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ admît a_1 commme période minimum, et de même pour les autres variables. Or cette conclusion peut être en défaut et ce serait le cas, par exemple, d'une fonction contenant seulement les carrés des fonctions $\varphi_1(x_1) = \cos 2\pi \frac{x_1}{a_1}, \ldots, \varphi_n(x_n) = \cos 2\pi \frac{x_n}{a_n}$. Mais ce n'est pas là le seul cas d'exception. D'une façon générale, désignons

par $\alpha_1 = \frac{a_1}{q_1}$ (q_1 entier) la plus grande des périodes minimum des fonctions de x_1, telles que $\Phi(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, obtenues en donnant à $x_2, x_3, \ldots, x_n$ des valeurs fixes, et définissons de même les périodes

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{q_2}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{a_n}{q_n}.$$

Les périodes $(\alpha_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \alpha_n)$ ne forment pas nécessairement encore un système minimum de la fonction $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que les coordonnées $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ d'une période quelconque fussent respectivement des multiples de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; or on peut affirmer seulement que les rapports $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ sont commensurables. Il est facile d'obtenir des exemples où ces rapports sont effectivement fractionnaires. Considérons la fonction

$$\Phi(x_1, x_2) = \sin 2\pi \frac{x_1}{a_1} \sin 2\pi \frac{x_2}{a_2}.$$

On a ici $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$. La fonction Φ admet cependant la période de coordonnées $\beta_1 = \frac{a_1}{2}$, $\beta_2 = \frac{a_2}{2}$.

Il y a un cas assez général où l'on peut affirmer que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forment une base du corps fondamental attaché à $f(x)$; c'est celui où la fonction de x_1, $\Phi(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ *admet* α_1 *comme période minimum, quelles que soient les valeurs fixes attribuées à* $x_2, \ldots, x_n$, et où il en est de même pour les autres fonctions $\Phi(x_1^0, x_2, x_3^0, \ldots, x_n), \ldots$ vis-à-vis des périodes $\alpha_2, \ldots$. Soient alors $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les coordonnées d'une période de la fonction Φ. On a, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$F[\varphi_1(x_1 + \beta_1), \varphi_2(x_2 + \beta_2), \ldots, \varphi_n(x_n + \beta_n)] = F[(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)].$$

Or, les fonctions φ étant continues, on peut déterminer les nombres x_2^0, $x_3^0, \ldots, x_n^0$, de façon que l'on ait

$$\varphi_2(x_2^0 + \beta_2) = \varphi_2(x_2^0), \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x_n^0 + \beta_n) = \varphi_n(x_n^0).$$

La fonction de x_1, $F[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2^0), \ldots, \varphi_n(x_n^0)]$, admet alors la période β_1

qui, en vertu de l'hypothèse faite, est nécessairement un multiple de α_1; on verrait de même que $\beta_2, \ldots, \beta_n$ sont des multiples de $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Dans tous les cas, si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ définissent une base du corps fondamental attaché à $f(x)$, $\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}, \ldots, \frac{1}{\gamma_n}$ s'expriment en fonctions linéaires à coefficients entiers de $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, et cela puisque le champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est attaché à $f(x)$. Bien entendu, on a supposé, dans tout ce qui précède, qu'aucune des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ n'est constante, et que la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ des variables indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'est constante par rapport à aucune d'elles.

Ces propriétés montrent qu'on ne peut songer à exprimer la fonction

$$f(x) = F[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

en fonction continue uniforme d'un nombre *moindre* de fonctions simplement périodiques. En particulier, la fonction $f(x)$ ne saurait être simplement périodique, ni constante, ni nulle.

A un certain point de vue, on voit que des fonctions données $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ périodiques continues, à périodes indépendantes, se conduisent, pour ainsi dire, comme de véritables variables indépendantes. Si la fonction

$$F[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

est nulle, quel que soit x, la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ des variables indépendantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est identiquement nulle; et si l'on a

$$F[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = \Phi[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)],$$

les deux fonctions $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sont identiques.

Il peut arriver que la même fonction $f(x)$ puisse s'exprimer de plusieurs manières, en fonction de fonctions périodiques à périodes indépendantes qui sont alors en même nombre dans ces diverses expressions de $f(x)$. Les divers systèmes de périodes qui y figurent définissent nécessairement le même corps.

Lorsque les périodes $a_1, \ldots, a_n$ des fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont *dépendantes*, appartenant à un même corps d'ordre p, l'ordre de toute

fonction

$$f(x) = F[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

est au plus égal à p, mais il peut lui être inférieur, et l'on ne peut assigner de limite à cette réduction. En posant par exemple

$$\varphi_1(x) = \cos x, \qquad \varphi_2(x) = \sin x, \qquad \varphi_3(x) = \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

les périodes 2π, 2π, a, appartiennent à un corps d'ordre 2 si a est incommensurable avec π; la fonction quasi-périodique

$$(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = 1 + \sin^2 2\pi \frac{x}{a}$$

est cependant d'ordre 1.

Entre des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ dont les périodes sont dépendantes, existent des relations de la forme

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0;$$

c'est-à-dire que l'on peut former des fonctions uniformes des variables indépendantes φ_1, φ_2, ..., φ_n qui, lorsqu'on y remplace ces dernières par $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, deviennent identiquement nulles.

On peut s'en rendre compte de la façon suivante : soit α_1, α_2, ..., α_p un système de périodes indépendantes dont le champ est équivalent à celui des périodes a_1, a_2, ..., a_n $(p < n)$. On a, entre ces périodes, des relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{\mu_1^1}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{\mu_p^1}{\alpha_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{a_p} = \dfrac{\mu_1^n}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{\mu_p^n}{\alpha_p} \end{array}\right\} \quad \mu_i^j \text{ entiers.}$$

Posons alors

$$\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{a_1} = \mu_1^1 \dfrac{y_1}{\alpha_1} + \ldots + \mu_p^1 \dfrac{y_p}{\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{x_n}{a_n} = \mu_1^n \dfrac{y_1}{\alpha_1} + \ldots + \mu_p^n \dfrac{y_p}{\alpha_p}, \end{array}$$

et considérons la fonction quasi-périodique

$$f(x) = F[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)].$$

On voit que la fonction des p variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_p) = F[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)],$$

où, dans le second membre, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont supposés exprimés en fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, est l'associée de $f(x)$ sur le champ des périodes *indépendantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Pour que $f(x)$ soit nul, il faut et il suffit que la fonction $\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ soit identiquement nulle par rapport aux variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Les fonctions $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2) \ldots, \varphi_n(x_n)$ sont elles-mêmes des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, périodiques et de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. On est donc ramené à la question, d'ailleurs plus générale, suivante :

Étant données n fonctions $(n > p)$

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_p), \quad f_2(y_1, y_2, \ldots, y_p), \quad \ldots, \quad f_n(y_1, y_1, \ldots, y_p)$$

continues, périodiques en $y_1, y_2, \ldots, y_p$, *les périodes* étant les mêmes *pour toutes ces fonctions, existe-t-il des fonctions continues uniformes* $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *telles que, en remplaçant* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *par* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *on obtienne une fonction de* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *identiquement nulle?*

Cette question est, du reste, identique à celle-ci :

Étant données n fonctions quasi-périodiques uniformément continues sur un même *champ d'ordre* $p < n$, *existe-t-il une fonction continue uniforme* $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *qui devienne nulle pour toute valeur* x *lorsqu'on remplace* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *par les fonctions considérées?*

J'ignore s'il en est ainsi effectivement dans le cas le plus général où, à part la périodicité et la continuité, on ne fait sur les fonctions

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_p), \quad \ldots, \quad f_n$$

aucune autre hypothèse particulière. Je n'ai pas cru devoir approfondir cette question, qui m'a paru d'une importance un peu secondaire. Toute-

fois l'existence des fonctions $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est certaine dans le cas où les fonctions f jouissent de la propriété suivante : Considérons l'une quelconque d'entre elles, f_1 par exemple, et donnons à $y_2, y_3, \ldots, y_p$ des valeurs fixes $y_2^0, y_3^0, \ldots, y_p^0$, mais quelconques; nous obtenons ainsi une fonction périodique de la seule variable y_1 de période α_1. On supposera que cette fonction $f_1(y_1, y_2^0, \ldots, y_p^0)$ possède dans l'intervalle o, α_1 un nombre limité de maxima et de minima, ce qui entraîne d'ailleurs cette conséquence que les équations de la forme

$$f_1(y_1, y_2^0, \ldots, y_p^0) = A,$$

où A désigne une constante quelconque, ont un nombre limité de racines dans l'intervalle o, α_1, et que, A variant, le nombre de ces racines a une limite supérieure. On fera la même hypothèse relativement aux autres variables et aux autres fonctions. Dans ce cas, on obtient sans difficulté un procédé d'élimination des variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ entre les fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_n$.

Envisageons le cas le plus simple, celui de deux fonctions continues $u(x)$, $v(x)$ périodiques et de même période α. Former une fonction $F(u, v)$, c'est obtenir une correspondance telle que, étant données des valeurs numériques quelconques u_0, v_0 attribuées aux variables u, v, on puisse déterminer $F(u_0, v_0)$.

L'équation

$$u(x) = u_0$$

a un nombre limité de racines dans l'intervalle o, α; soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ces racines, $v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_k)$ les valeurs correspondantes de la fonction $v(x)$.

Formons le produit

$$[v_0 - v(x_1)][v_0 - v(x_2)]\ldots[v_0 - v(x_k)],$$

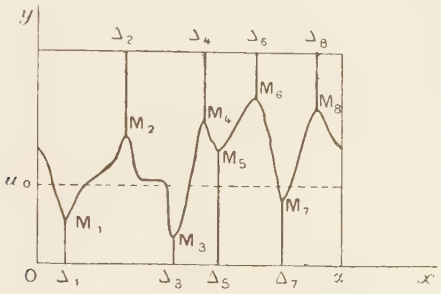
qui définira la valeur $F(u_0, v_0)$ correspondant aux valeurs u_0, v_0. La fonction $F(u, v)$ ainsi définie vérifie identiquement la relation

$$F[u(x), v(x)] = 0,$$

mais elle n'est pas continue, car, u_0 variant, certaines des racines $x_1, \ldots, x_k$

disparaissent lorsqu'on atteint un maximum ou un minimum de $u(x)$. Il est facile de lever la difficulté et, pour faciliter le raisonnement, employons une méthode géométrique. Représentons la courbe $y = u(x)$ dans l'intervalle o, α, et soient M_1, M_2, M_3, ... (*fig.* 2), les points, en nombre

Fig. 2.



limité, où $u(x)$ devient maximum ou minimum. Par le point M_1 qui représente un minimum, menons une demi-droite $M_1\Delta_1$ parallèle à oy dirigée vers les y négatifs; par M_2, qui représente un maximum, menons une demi-droite $M_2\Delta_2$ parallèle à oy dirigée du côté des y positifs, et ainsi de suite. Considérons alors la figure formée par la courbe et par les demi-droites $M_1\Delta_1$, $M_2\Delta_2$, $M_3\Delta_3$, ... Une parallèle quelconque $y = u_0$ coupe la figure en un certain nombre de points dont les uns, d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_k$, appartiennent à la courbe, et les autres, d'abscisses x_{k+1}, x_{k+2}, ..., aux droites Δ. Si l'on compte deux fois ces derniers, on obtient un ensemble de valeurs x_1, x_2, ..., x_n, en nombre fixe, variant d'une façon continue avec la parallèle $y = u_0$ et comprenant toujours les racines de l'équation $u(x) = u_0$. Dans ces conditions, le produit

$$[v_0 - v(x_1)][v_0 - v(x_2)]\ldots[v_0 - v(x_n)]$$

varie d'une façon continue avec u_0, v_0, et définit ainsi une fonction continue $F(u, v)$ satisfaisant aux conditions du problème. Lorsqu'on en a une, on peut en former une infinité, en multipliant par une fonction continue quelconque.

Le même procédé de démonstration s'applique à montrer que, si l'on a $p + 1$ fonctions périodiques continues $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_{p+1}(x)$, possé-

dant chacune un nombre limité de maxima et de minima dans tout intervalle fini, et dont les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ sont liées par une relation de dépendance, on peut former des fonctions continues $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p+1})$ qui deviennent nulles lorsqu'on y substitue les fonctions considérées.

Supposons que l'on ait en effet

$$\frac{1}{\alpha_{p+1}} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\mu_p}{\alpha_p},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ étant des nombres rationnels que l'on peut supposer entiers, car, s'il en était autrement, en désignant par q leur plus petit dénominateur commun, on choisirait $q\alpha_1, q\alpha_2, \ldots, q\alpha_p$ comme périodes de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x)$.

Soient donc $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_p^0, \varphi_{p+1}^0$ un système de valeurs numériques quelconques, choisies dans les intervalles de variation des fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{p+1}(x)$. Considérons les équations.

$$\varphi_1(x) = \varphi_1^0, \qquad \varphi_2(x) \quad \varphi_2^0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p(x) = \varphi_p^0;$$

parmi les racines de chacune d'elles, $\varphi_i(x) = \varphi_i^0$ par exemple, n'envisageons que celles comprises entre o et α_i; leur nombre est fini. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ un groupe de racines prises respectivement dans chacune des équations précédentes; le nombre de ces groupes est fini. En ajoutant à x_1 un nombre entier de périodes α_1, à x_2 un nombre entier de périodes $\alpha_2, \ldots$, on obtiendra un groupe différent de solutions qu'on pourra appeler, si l'on veut, un groupe congru à $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Au système de solutions $x_1, x_2, \ldots, x_p$, faisons correspondre le nombre ξ défini par l'égalité

$$\frac{\xi}{\alpha_{p+1}} = \mu_1 \frac{x_1}{\alpha_1} + \mu_2 \frac{x_2}{\alpha_2} + \ldots + \mu_p \frac{x_p}{\alpha_p}.$$

Si au système $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on substitue un système congru

$$x_1 + q_1\alpha_1, \quad \ldots, \quad x_p + q_p\alpha_p,$$

ξ se change en

$$\xi + (\mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \ldots + \mu_p q_p)\alpha_{p+1} = \xi + r\alpha_{p+1},$$

r étant entier.

A chaque groupe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ correspond ainsi un nombre ξ; soit $\varphi_{p+1}(\xi)$, la valeur correspondante de $\varphi_{p+1}(x)$. Pour tous les groupes congrus à un même groupe donné, $\varphi_{p+1}(\xi)$ a donc la même valeur, de sorte que le nombre des valeurs $\varphi_{p+1}(\xi)$ est égal au nombre k des groupes distincts de solutions $x_1, \ldots, x_p$ nombre qui est *fini*. Formons alors le produit

$$[\varphi_{p+1}^0 - \varphi_{p+1}(\xi_1)][\varphi_{p+1}^0 - \varphi_{p+1}(\xi_2)]\ldots[\varphi_{p+1}^0 - \varphi_{p+1}(\xi_k)],$$

chaque valeur ξ_i correspondant à un groupe de solutions. Ce produit, bien déterminé lorsqu'on s'est donné $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_p^0, \varphi_{p+1}^0$, définit ainsi une fonction uniforme $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1})$. Pour montrer que celle-ci devient identiquement nulle lorsqu'on remplace $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p+1}$ par les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{p+1}(x)$, appelons x_0 une valeur quelconque attribuée à la variable x. On a ici

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_1^0, \qquad \varphi_2(x_0) = \varphi_2^0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p(x_0) = \varphi_p^0, \qquad \varphi_{p+1}(x_0) = \varphi_{p+1}^0;$$

l'un des groupes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ précédemment définis, ou congru à l'un de ces derniers, est ici le groupe

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = x_0;$$

le nombre ξ correspondant devient alors égal lui-même à x_0. Dans le produit qui définit la fonction F le facteur

$$\varphi_{p+1}^0 - \varphi(\xi) = \varphi_{p+1}(x_0) - \varphi_{p+1}(x_0)$$

est nul et, par suite aussi, la fonction F.

Ici encore, la fonction F définie de cette manière n'est pas continue, mais on peut la rendre continue, par un procédé analogue à celui employé un peu plus haut dans le cas de deux fonctions périodiques.

Il résulte de là que si, parmi les n périodes des fonctions périodiques $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, il y en a seulement p d'indépendantes, il existe au moins $n - p$ relations distinctes entre ces fonctions.

On voit en définitive que les relations existant entre des fonctions périodiques caractérisent, pour ainsi dire, la dépendance de leurs périodes, ce que l'on pourrait exprimer ainsi : *la condition nécessaire et suffisante pour que les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient dépendantes est, qu'étant*

données n fonctions périodiques quelconques non constantes $v_1(x), \ldots, v_n(x)$, *de périodes respectives* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *il existe une relation* [1] *entre ces fonctions.*

Sachant éliminer x entre deux fonctions périodiques $u(x)$, $v(x)$ de même période, on pourra éliminer successivement $y_1, y_2, \ldots, y_p$ entre $p+1$ fonctions $f_1(y_1, \ldots, y_p), \ldots, f_{p+1}(y_1, \ldots, y_p)$, continues périodiques en $y_1, y_2, \ldots, y_p$, les périodes correspondantes étant les mêmes pour toutes ces fonctions, et l'on en conclura cette propriété plus générale.

Étant données $(p+1)$ *fonctions quasi-périodiques uniformément continues* $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_{p+1}(x)$, *définies sur un même champ absolu d'ordre p, on peut former des fonctions uniformes* $F(v_1, v_2, \ldots, v_{p+1})$ *qui deviennent identiquement nulles lorsqu'on remplace* $v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$ *par les fonctions quasi-périodiques données.*

L'étude des fonctions de fonctions quasi-périodiques d'ordre quelconque est beaucoup plus difficile que celle des fonctions de fonctions périodiques. Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sont des fonctions quasi-périodiques continues respectivement sur les champs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la fonction continue $F[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$, est quasi-périodique sur le champ A résultant des champs $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Comme les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont elles-mêmes quasi-périodiques continues sur le champ A, on est finalement ramené à l'étude des fonctions de fonctions quasi-périodiques définies sur un même champ de périodes qu'on peut toujours supposer indépendantes. L'ordre de quasi-périodicité de ces fonctions est au plus égal à l'ordre du champ commun A, mais il peut lui être inférieur; cela dépend à la fois de la nature des fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ et de celle de la fonction $F(f_1, \ldots, f_n)$; cet ordre peut même s'abaisser jusqu'à 0, c'est-à-dire que $F(f_1, \ldots, f_n)$ peut devenir une constante.

---

[1] C'est-à-dire une fonction continue uniforme $F(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ qui devient nulle lorsqu'on remplace $v_1, v_2, \ldots, v_n$ par les fonctions données.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES UNIFORMÉMENT CONTINUES.

Nous abandonnerons maintenant les fonctions quasi-périodiques simplement continues, pour nous attacher presque exclusivement aux fonctions quasi-périodiques uniformément continues en raison de l'intérêt tout particulier qu'elles présentent.

Les plus simples parmi ces dernières sont évidemment les lignes trigonométriques continues, c'est-à-dire les sinus ou cosinus dont les arguments sont proportionnels à la variable x; ensuite les fonctions simples de ces lignes, et en particulier *les polynomes entiers d'un nombre quelconque de sinus ou de cosinus, dont les arguments sont proportionnels à la même variable x, les facteurs de proportionnalité étant égaux ou différents.* Il est clair, d'ailleurs, qu'un tel polynome peut toujours se mettre sous la forme d'une *somme de sinus ou de cosinus* dont les arguments sont aussi proportionnels à la variable x. Les fonctions qui sont représentables de cette manière forment donc, abstraction faite des périodes qu'elles renferment, une classe particulière, un ensemble bien déterminé E, parmi les fonctions quasi-périodiques uniformément continues.

Les fonctions de l'ensemble E qui sont attachées à un même champ de périodes données $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (indépendantes ou non) peuvent toujours se mettre sous l'une des deux formes suivantes :

1° Sous la forme d'un polynome entier $P(x)$ en

$$\cos 2\pi \frac{x}{a_1}, \quad \cos 2\pi \frac{x}{a_2}, \quad \ldots, \quad \cos 2\pi \frac{x}{a_n}, \quad \sin 2\pi \frac{x}{a_1}, \quad \ldots, \quad \sin 2\pi \frac{x}{a_n};$$

2° Sous la forme d'un nombre fini de termes de la forme

$$A \cos 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désignent des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls.

Au moyen de ces fonctions élémentaires, on peut obtenir les fonctions quasi-périodiques uniformément continues, par un procédé qui semble prendre, dans un certain champ d'études, une importance de plus en plus considérable; je veux parler du procédé qui consiste, partant de fonctions bien connues ou bien caractérisées, à en obtenir une classe nouvelle en considérant celles qui sont des limites des premières.

Envisageons les fonctions qui peuvent être considérées comme des limites de fonctions appartenant à l'ensemble E. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la façon dont la limite est atteinte, les fonctions ainsi définies ne possèdent aucune propriété particulière, si ce n'est qu'elles sont ponctuellement discontinues.

Supposons, au contraire, qu'on fasse les hypothèses suivantes :

1° *Les fonctions* $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\nu(x)$, *de l'ensemble* E, *qui ont pour limite* $f(x)$, *sont des fonctions quasi-périodiques attachées à un même champ* A *de périodes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2° *La limite* $f(x)$ *est atteinte uniformément relativement à l'ensemble de toutes les valeurs réelles* x.

Nous savons (¹) alors que $f(x)$ est une fonction quasi-périodique uniformément continue attachée au champ A.

La première question qui se pose est de savoir si toute fonction quasi-périodique uniformément continue peut être obtenue de cette façon. Il en est ainsi effectivement, comme il résulte du théorème déjà cité de M. Bohl (p. 123) qui a pénétré par cette voie dans l'étude des fonctions quasi-périodiques uniformément continues.

Toute fonction quasi-périodique uniformément continue sur le champ A *peut être considérée comme la limite uniforme de fonctions élémentaires* $P(x)$ *attachées au champ* A, ou encore, ce qui est l'expression de la même propriété :

Toute fonction quasi-périodique uniformément continue sur le champ A *peut être développée en série uniformément convergente pour*

(¹) Page 145.

toutes les valeurs x, dont les termes sont des polynomes [1] *quasi-périodiques sur le champ* A.

Si, tout en supposant la convergence uniforme, les fonctions $P_\nu(x)$ n'étaient plus assujetties à être attachées au même champ de périodes, leur limite $f(x)$ définirait une fonction jouissant encore de propriétés très particulières, analogues à celles qui caractérisent les fonctions quasi-périodiques uniformément continues. On obtiendrait ainsi une généralisation correspondant, pour ainsi dire, *au cas où l'ordre du champ devient infini.*

Mais il faut remarquer que les fonctions quasi-périodiques simplement continues ne peuvent en aucune façon être obtenues par ce procédé.

Les développements précédents des fonctions quasi-périodiques uniformément continues sont très importants en ce sens qu'ils convergent uniformément dans un domaine infini, mais ils ne sont pas uniques; ils correspondent à ce théorème relatif aux fonctions périodiques continues :

Toute fonction périodique continue peut être considérée comme la limite, atteinte uniformément, d'une suite finie de Fourier.

Il est donc naturel de se demander si, pour une fonction quasi-périodique uniformément continue, il n'existe pas, sous des conditions analogues aux conditions de Dirichlet, un développement qui réunisse les deux avantages de la série de Fourier vis-à-vis des fonctions périodiques continues, à savoir :

1° Le développement est uniformément convergent pour toute valeur x;

2° Il est unique.

De tels développements existent en général, et nous en obtiendrons deux formes distinctes importantes. C'est par la considération des fonctions associées et de leurs développements en série que nous arriverons au but. Or, les fonctions associées sont, à part la continuité et la périodicité, des fonctions quelconques de plusieurs variables; il est indispensable que nous

---

[1] En appelant *polynomes quasi-périodiques* des polynomes des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

présentions quelques remarques importantes au sujet de leurs développements en série de Fourier.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction *continue périodique* en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Une telle fonction est en général développable en série de Fourier. Parmi toutes les formes que l'on peut donner à ce développement, nous adopterons la suivante :

$$(1)\qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + m_2 \frac{x_2}{a_2} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + m_2 \frac{x_2}{a_2} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right)$$

où le second membre est une série multiple, et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers prenant toutes les valeurs positives, négatives ou nulles. De plus, nous supposerons que les coefficients (A, B), (A', B') correspondant respectivement aux deux systèmes d'entiers $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $(-m_1, -m_2, \ldots, m_n)$, vérifient les relations

$$A = A', \qquad B = -B'.$$

Dans ces conditions, si la série du second membre est uniformément convergente, les coefficients s'obtiennent par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \displaystyle\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \\ B = \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \displaystyle\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n; \end{cases}$$

de sorte que, si un tel développement existe, il est unique.

Il ne faut guère songer à déterminer les conditions nécessaires les plus générales pour assurer l'existence d'un tel développement, et les cas dans lesquels la série précédente, où l'on détermine les coefficients A et B par les formules (2), est convergente. On se heurte là à des difficultés plus complexes encore que celles que l'on rencontre dans le cas d'une variable. Il est toutefois des cas très étendus, et notamment lorsqu'il existe des dérivées

partielles continues, où la convergence de la série

$$(3)\quad \sum A\cos 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1}+m_2\frac{x_2}{a_2}+\ldots+m_n\frac{x_n}{a_n}\right)+B\sin 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1}+\ldots+m_n\frac{x_n}{a_n}\right)$$

est certaine [A et B désignant les quantités (2)].

Pour citer un exemple précis, démontrons avec M. Bohl que lorsque les dérivées

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}}$$

existent, sont continues et périodiques, pour

$$p_1\leqq P_1,\qquad p_2\leqq P_2,\qquad \ldots,\qquad p_n\leqq P_n,$$

la dérivée

$$\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}F}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\ldots\partial x_n^{q_n}}$$

est développable en série de la forme (3) (qui est alors *absolument et uniformément convergente*) si

$$q_1\leqq P_1-2,\qquad q_2\leqq P_2-2,\qquad \ldots,\qquad q_n\leqq P_n-2.$$

Cela revient à établir que la série (3), définie au moyen des formules (2), est absolument uniformément convergente si les dérivées

$$\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n}F}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}}$$

sont continues et périodiques pour

$$p_1\leqq 2,\qquad p_2\leqq 2,\qquad \ldots,\qquad p_n\leqq 2.$$

Pour cela, remarquons que les coefficients A et B peuvent s'exprimer en fonction des dérivées partielles successives de la façon suivante :

1° Les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont tous différents de o; on a alors

$$(4)\quad \begin{cases} A=\dfrac{K}{m_1^{P_1}m_2^{P_2}\ldots m_n^{P_n}}\displaystyle\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n}\frac{\partial^{P_1+\ldots+P_n}F}{\partial x_1^{P_1}\partial x_2^{P_2}\ldots\partial x_n^{P_n}}\cos 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1}+\ldots+m_n\frac{x_n}{a_n}+\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{4}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n,\\ B=\dfrac{K}{m_1^{P_1}m_2^{P_2}\ldots m_n^{P_n}}\displaystyle\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n}\frac{\partial^{P_1+\ldots+P_n}F}{\partial x_1^{P_1}\partial x_2^{P_2}\ldots\partial x_n^{P_n}}\sin 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1}+\ldots+m_n\frac{x_n}{a_n}+\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{4}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n.\end{cases}$$

K désignant une constante égale à

$$K = \frac{1}{(2\pi)^{P_1+\ldots+P_n} a_1^{1-P_1} a_2^{1-P_2} \ldots a_n^{1-P_n}}.$$

On obtient immédiatement ces formules en intégrant par parties leurs seconds membres; dans les intégrations successives interviennent les dérivées

$$\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n} F}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}},$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prennent toutes les valeurs entières respectivement inférieures ou égales à $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Or, puisque la dérivée $\frac{\partial^{P_1+\ldots+P_n} F}{\partial x_1^{P_1} \ldots \partial x_n^{P_n}}$ est finie, inférieure en module à un certain nombre fixe, que l'on peut désigner par $\frac{M}{|a_1 a_2 \ldots a_n|}$, on voit que,

$$|A| < \left| \frac{KM}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}} \right|,$$

$$|B| < \left| \frac{KM}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}} \right|.$$

2° Certains des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ peuvent être nuls; supposons par exemple que les seuls entiers différents de o soient $m_1, m_2, \ldots, m_k$. On peut écrire dans ce cas

$$(5) \quad A = \frac{K'}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_k^{P_k}} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \cdots \int_0^{a_n} \frac{\partial^{P_1+\ldots+P_k} F}{\partial x_1^{P_1} \partial x_2^{P_2} \ldots \partial x_k^{P_k}} \cos 2\pi \left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_k \frac{x_k}{a_k} + \frac{P_1+\ldots+P_k}{4} \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

et une formule analogue pour B, K′ étant une autre constante égale à

$$K' = \frac{1}{(2\pi)^{P_1+\ldots+P_k} a_1^{1-P_1} \ldots a_k^{1-P_k} a_{k+1} \ldots a_n}.$$

Comme la dérivée figurant au second membre de la formule (5) possède, en valeur absolue, un maximum $\frac{M'}{|a_1 a_2 \ldots a_n|}$, on aura encore

$$|A| < \left| \frac{K'M'}{m_1^{P_1} \ldots m_k^{P_k}} \right|,$$

$$|B| < \left| \frac{K'M'}{m_1^{P_1} \ldots m_k^{P_k}} \right|.$$

Les nombres K, K′, M, M′ et, par suite, KM, KM′ ont un maximum absolu, C. On pourra donc écrire dans tous les cas

$$|A| < \left|\frac{C}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}}\right|,$$

$$|B| < \left|\frac{C}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}}\right|,$$

en convenant de remplacer par l'unité ceux des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ qui seraient nuls. Or la série multiple, dont le terme général a pour expression, avec les mêmes conventions relativement aux entiers nuls,

$$u_\nu = \left|\frac{1}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}}\right|,$$

est convergente si

$$P_1 \geqq 2, \qquad P_2 \geqq 2, \qquad \ldots, \qquad P_n \geqq 2;$$

en effet, en se bornant aux valeurs positives des entiers m, ce qui est permis puisque le nombre des combinaisons de signe est limité, on a

$$\sum \frac{1}{m_1^{P_1} m_2^{P_2} \ldots m_n^{P_n}}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2^{P_1}} + \ldots + \frac{1}{m_1^{P_1}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2^{P_2}} + \ldots + \frac{1}{m_2^{P_2}} + \ldots\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^{P_n}} + \ldots + \frac{1}{m_n^{P_n}} + \ldots\right),$$

le second membre étant ainsi le produit de n séries convergentes.

La proposition est établie.

Il y a d'autres cas où le développement d'une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est possible sous la forme (1), les coefficients A et B étant déterminés par les formules (3); on les obtient en imposant à la fonction F des conditions d'une autre nature, analogues aux conditions dites de Dirichlet, dans le cas d'une seule variable.

Nous dirons que *la fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *supposée continue, périodique, satisfait aux conditions de Dirichlet si elle possède les propriétés suivantes :*

1° *Toutes les fonctions d'une variable telles que* $F(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$, *obtenues en donnant à* $(n-1)$ *des variables des valeurs fixes, satisfont*

aux conditions de Dirichlet, c'est-à-dire que dans tout intervalle fini *le nombre de leurs maxima et de leurs minima est* limité; *nous le supposerons de plus inférieur à un nombre fixe* μ.

2° Donnons dans F des valeurs fixes quelconques à $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Nous supposons que *la fonction de* x_1

$$\Phi(x_1) = F(x_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

si elle n'est pas constante, possède, dans l'intervalle $0 \leqq x_1 \leqq a_1$, *un nombre de maxima et de minima inférieur à* μ; $h_2, \ldots, h_n$ sont des constantes quelconques, voisines de 0; la même propriété doit avoir lieu relativement aux autres variables.

Ces conditions sont ce que l'on pourrait appeler des *conditions de Dirichlet du second ordre;* mais dans la suite nous dirons toujours, pour abréger, qu'une fonction de plusieurs variables satisfait aux conditions de Dirichlet si elle possède l'ensemble des propriétés 1 et 2.

Nous allons montrer que si une fonction F satisfait à ces conditions elle est développable en série de Fourier, et je me bornerai pour la démonstration au cas de deux variables; l'extension au cas d'un nombre quelconque de variables n'apportant qu'une complication inutile de notations.

Soit donc $F(x, y)$ une fonction continue périodique de périodes a et b satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Posons

$$(6) \qquad \begin{cases} A_{m,n} = \dfrac{1}{ab}\displaystyle\int_0^a \int_0^b F(x, y) \cos 2\pi \left(m\dfrac{x}{a} + n\dfrac{y}{b}\right) dx\, dy, \\ B_{m,n} = \dfrac{1}{ab}\displaystyle\int_0^a \int_0^b F(x, y) \sin 2\pi \left(m\dfrac{x}{a} + n\dfrac{y}{b}\right) dx\, dy, \end{cases}$$

et envisageons la série

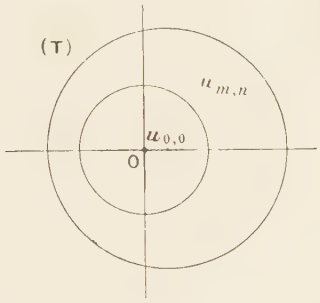
$$(7) \qquad \sum u_{m,n} = \sum A_{m,n} \cos 2\pi \left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right) + B_{m,n} \sin 2\pi \left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right),$$

où m, n prennent toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles.

Rappelons brièvement ce que l'on entend par la convergence d'une telle série. Choisissons deux axes de coordonnées, et au point de coordonnées m, n plaçons le terme $u_{m,n}$, le terme $u_{0,0}$ occupant le centre du Tableau T ainsi formé. Le Tableau T est convergent si, choisissant une suite de courbes fer-

mées $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ qui grandissent indéfiniment dans tous les sens autour de l'origine, la suite des quantités obtenues en formant la somme des termes compris à l'intérieur de chacune d'elles est une suite convergente. Il est clair que si la convergence a lieu pour une suite particulière de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ (*fig.* 3), elle a lieu également pour toute autre

Fig. 3.



suite $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k, \ldots$, pourvu que celles-ci grandissent indéfiniment dans tous les sens en s'éloignant de l'origine. Pour étudier la convergence du Tableau T, on peut donc se borner à la recherche de cette convergence relativement à une suite particulière de courbes C_k, par exemple des rectangles de centre O, dont les côtés parallèles aux axes s'éloignent indéfiniment.

Ceci posé, considérons la série (7), et formons la somme des termes compris dans le rectangle (ou sur ses côtés) $x = \pm m$, $y = \pm n$. Si l'on remarque que le terme général de la série (7) s'écrit, en tenant compte des formules (6),

$$\frac{1}{ab}\int\int F(\alpha, \beta)\cos 2\pi\left(m\frac{\alpha - x}{a} + n\frac{\beta - y}{b}\right)d\alpha\, d\beta,$$

on a pour l'expression de cette somme

$$S_{m,n} = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b F(\alpha, \beta)\sum_{p=-m}^{p=+m}\sum_{q=-n}^{q=+n}\cos 2\pi\left(p\frac{\alpha - x}{a} + q\frac{\beta - y}{b}\right)d\alpha\, d\beta.$$

Or la double somme qui figure dans l'intégrale du second membre s'ob-

tient aisément. En posant, en effet,

$$u = 2\pi\frac{\alpha - x}{a}, \qquad v = 2\pi\frac{\beta - y}{b},$$

on a à calculer

$$\sum\sum \cos(pu + qv) = \sum\sum \cos pu \cos qv - \sum\sum \sin pu \sin qv.$$

Or

$$\sum\sum \sin pu \sin qv = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum\sum \cos pu \cos qv = \sum_{p=-m}^{p=+m} \cos pu \sum_{q=-n}^{q=+n} \cos qv;$$

comme

$$\sum \cos pu = \frac{\sin(2m+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}, \qquad \sum \cos qv = \frac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}},$$

il vient finalement

$$S_{m,n} = \frac{1}{ab}\int\int F(\alpha, \beta)\frac{\sin(2m+1)\pi\frac{\alpha - x}{a}}{\sin\pi\frac{\alpha - x}{a}}\,\frac{\sin(2n+1)\pi\frac{\beta - y}{b}}{\sin\pi\frac{\beta - y}{b}}\,d\alpha\,d\beta.$$

Il s'agit de voir si cette somme a une limite, lorsque m et n grandissent indéfiniment par valeurs entières positives.

Mettons-la sous la forme

$$S_{m,n} = \frac{1}{ab}\int_0^a \frac{\sin(2m+1)\pi\frac{\alpha - x}{a}}{\sin\pi\frac{\alpha - x}{a}}\,d\alpha \int_0^b F(\alpha, \beta)\frac{\sin(2n+1)\pi\frac{\beta - y}{b}}{\sin\pi\frac{\beta - y}{b}}\,d\beta;$$

en posant $\gamma = \pi\frac{\beta - y}{b}$, la deuxième de ces intégrales s'écrit

$$(8) \qquad J = \frac{b}{\pi}\int_{-\pi\frac{y}{b}}^{\pi - \pi\frac{y}{b}} F\left(\alpha, y + \frac{b\gamma}{\pi}\right)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma.$$

D'après les propriétés connues [1] de ces intégrales, on voit que pour $n = \infty$ J a comme limite, puisque F est une fonction continue périodique,

$$b\,F(\alpha, y).$$

Mais il y a plus; en raison des conditions que nous avons imposées à la fonction $F(x, y)$, l'intégrale (8), lorsqu'on fait varier α et y, tend uniformément vers $b\,F(\alpha, y)$, c'est-à-dire qu'étant donné ε positif, on pourra trouver un entier ν tel que, pour $n \geqq \nu$, on ait, quels que soient α et y,

$$|J - b\,F(\alpha, y)| < \varepsilon.$$

La démonstration de cette propriété étant assez longue, je l'ai placée dans une Note (Note II) à la fin de ce travail. Admettons-la pour l'instant. On peut alors écrire

$$J = b\,F(\alpha, y) + \eta$$

avec

$$|\eta| < \varepsilon$$

lorsque $n \geqq \nu$ et quels que soient α et y. L'expression de $S_{m,n}$ devient

$$S_{m,n} = \frac{1}{a}\int_0^a F(\alpha, y)\,\frac{\sin(2m+1)\pi\dfrac{\alpha - x}{a}}{\sin\pi\dfrac{\alpha - x}{a}}\,d\alpha + \frac{1}{ab}\int_0^a \eta\,d\alpha.$$

Or, la fonction $F(\alpha, y)$ satisfaisant aux conditions de Dirichlet, l'intégrale

$$I = \frac{1}{a}\int_0^a F(\alpha, y)\,\frac{\sin(2m+1)\pi\dfrac{\alpha - x}{a}}{\sin\pi\dfrac{\alpha - x}{a}}\,d\alpha$$

tendra, pour les mêmes raisons, uniformément vers $F(x, y)$, c'est-à-dire qu'on pourra déterminer l'entier positif μ de façon que, pour $m \geqq \mu$ on ait, quels que soient x, y,

$$|I - F(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b};$$

---

[1] Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 217-227.

d'ailleurs

$$\left|\frac{1}{ab}\int_0^a \eta\, d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{b};$$

de sorte que finalement, sous les seules conditions

$$m \geqq \mu, \qquad n \geqq \nu,$$

on aura

$$|S_{m,n} - F(x, y)| < 2\frac{\varepsilon}{b};$$

la série (7) est donc *uniformément convergente* et a pour somme $F(x,y)$.

Pour terminer cette question, voyons quel est en général l'ordre de petitesse des coefficients $A_{m,n}$, $B_{m,n}$. On peut écrire

$$\begin{aligned} A_{m,n} = \; & \frac{1}{ab}\int_0^b \cos 2\pi\frac{n\beta}{b}\, d\beta \int_0^a F(\alpha, \beta)\cos 2\pi\frac{m\alpha}{a}\, d\alpha \\ & - \frac{1}{ab}\int_0^b \sin 2\pi\frac{n\beta}{b}\, d\beta \int_0^a F(\alpha, \beta)\sin 2\pi\frac{m\alpha}{a}\, d\alpha. \end{aligned}$$

Or, laissons β fixe, et considérons la fonction de α, $F(\alpha, \beta)$, dans un intervalle (g, h), où elle varie dans le même sens. On peut écrire, d'après une propriété connue, en supposant, par exemple, que $F(\alpha, \beta)$ décroisse dans l'intervalle (g, h),

$$\begin{aligned} \int_g^h F(\alpha, \beta)\cos 2\pi\frac{m\alpha}{a}\, d\alpha &= F(g, \beta)\int_g^\xi \cos 2\pi\frac{m\alpha}{a}\, d\alpha \\ &= \frac{a}{2\pi}F(g, \beta)\frac{\sin 2\pi\frac{m\xi}{a} - \sin 2\pi\frac{mg}{a}}{m}, \end{aligned}$$

ξ étant compris entre g et h; on aurait une formule analogue si $F(\alpha, \beta)$ croissait de g à h. D'après cela, on voit, en désignant par $\frac{\pi M}{a}$ le maximum de la valeur absolue de $F(x, y)$, que

$$\left|\int_0^h F(\alpha, \beta)\cos 2\pi\frac{m\alpha}{a}\, d\alpha\right| < \frac{M}{|m|},$$

ou encore, en appelant μ_β le nombre des maxima et des minima de la fonction $F(\alpha, \beta)$ (β fixe),

$$\left| \int_0^a F(\alpha, \beta) \cos 2\pi \frac{m\alpha}{a} d\alpha \right| < \frac{M\mu_\beta}{|m|}.$$

Si *nous supposons que, β variant, μ_β reste inférieur au nombre fixe μ*, il vient en définitive

$$|A_{m,n}| < \frac{A}{|m|}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{A}{|n|}.$$

Si le nombre des maxima et des minima de la fonction $F(\alpha, \beta)$ (α fixe) a une limite supérieure lorsque α varie, on aura de même

$$|A_{m,n}| < \frac{A'}{|n|}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{A'}{|n|},$$

et, en combinant ces deux sortes d'inégalités,

$$|A_{m,n}| < \frac{C}{\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Les coefficients $A_{m,n}$ diminuent, en général, comme $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$, mais il est de nombreux cas où l'on peut trouver pour ces coefficients une limite inférieure à la précédente.

Supposons que la fonction $F(x, y)$ périodique en x, y admette des dérivées partielles du premier ordre continues, satisfaisant aux conditions de Dirichlet, et que de plus le nombre des maxima et des minima de $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, considérés comme fonctions d'une variable, ait une limite supérieure. On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= -\frac{1}{2\pi mb} \iint \frac{\partial F}{\partial x} \sin 2\pi \left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b}\right) dx\, dy \\ &= -\frac{1}{2\pi na} \iint \frac{\partial F}{\partial y} \sin 2\pi \left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b}\right) dx\, dy, \\ B_{m,n} &= \frac{1}{2\pi mb} \iint \frac{\partial F}{\partial x} \cos 2\pi \left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b}\right) dx\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi na} \iint \frac{\partial F}{\partial y} \cos 2\pi \left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b}\right) dx\, dy, \end{aligned}$$

de sorte qu'avec les hypothèses faites sur $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ on peut écrire successivement

$$|A_{m,n}| < \frac{C'}{|m|\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C'}{|m|\sqrt{m^2+n^2}},$$

$$|A_{m,n}| < \frac{C''}{|n|\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C''}{|n|\sqrt{m^2+n^2}},$$

et, en combinant ces inégalités,

$$|A_{m,n}| < \frac{C}{m^2+n^2}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C}{m_2+n^2}.$$

Supposons de même que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, *supposées continues, périodiques, satisfassent aux conditions de Dirichlet et possèdent, considérées par rapport à chaque variable, un nombre de maxima et de minima inférieur à un nombre fixe.* On aura alors

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= -\frac{1}{4\pi^2 m^2}\frac{a}{b}\int\int\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)dx\,dy \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 n^2}\frac{b}{a}\int\int\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)dx\,dy, \end{aligned}$$

et des formules analogues pour $B_{m,n}$. On conclut de là,

$$|A_{m,n}| < \frac{D'}{m^2\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{D'}{m^2\sqrt{m^2+n^2}},$$

$$|A_{m,n}| < \frac{D''}{n^2\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{D''}{n^2\sqrt{m^2+n^2}},$$

et, par suite,

$$|A_{m,n}| < \frac{C}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dans ce cas la série uniformément convergente

$$F(x,y) = \sum A_{m,n}\cos 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right) + B_{m,n}\sin 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)$$

est absolument convergente.

En continuant de proche en proche, on voit que si les dérivées $\frac{\partial^p F}{\partial x^p}$, $\frac{\partial^p F}{\partial y^p}$

satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut pour $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, on aura pour $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ une limite supérieure de la forme

$$|A_{m,n}| < \frac{C}{(m^2+n^2)^{\frac{p+1}{2}}}, \qquad |B_{m,n}| < \frac{C}{(m^2+n^2)^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Le cas de deux variables s'étend immédiatement au cas de n variables.

Si la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, continue périodique, satisfait aux conditions de Dirichlet, elle est développable en série de la forme

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\sum A_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) \\ &+ B_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right); \end{aligned}$$

les coefficients A et B sont donnés par les formules (2), et l'on a

$$(10) \qquad \begin{cases} A_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = A_{-m_1, -m_2, \ldots, -m_n}, \\ B_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = -B_{-m_1, -m_2, \ldots, -m_n}. \end{cases}$$

De plus, le développement considéré est le seul développement uniformément convergent de cette forme capable de représenter la fonction donnée, les coefficients A et B étant, bien entendu, supposés satisfaire aux conditions (10).

Enfin si les dérivées $\frac{\partial^p F}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p F}{\partial x_2^p}, \ldots, \frac{\partial^p F}{\partial x_n^p}$ *sont continues, satisfont aux conditions de Dirichlet, et ont, par rapport à chaque variable, un nombre de maxima et de minima qui reste inférieur à un nombre fixe, on a* [1]

$$|A_{m_1, \ldots, m_n}| < \frac{C}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2)^{\frac{p+1}{2}}},$$

$$|B_{m_1, m_2, \ldots, m_n}| < \frac{C}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2)^{\frac{p+1}{2}}},$$

de sorte que si $p \geqq n$ *la série* (9) *est absolument convergente.*

---

[1] On exclut bien entendu la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$.

Nous avons obtenu, en résumé, un certain nombre de caractères assurant dans la plupart des cas la convergence de la série de Fourier, convergence qui résultera généralement, soit de l'existence de dérivées partielles continues périodiques (p. 165), soit des conditions de Dirichlet (p. 167). *Dans tous les cas, lorsqu'il existe, ce développement est unique.*

Les fonctions continues périodiques de plusieurs variables qui ne sont pas développables en séries de la forme (3) constituent une exception, au même titre que les fonctions continues périodiques d'une variable non développables en série de Fourier. La plupart des propriétés que nous étudierons seront indépendantes de l'existence de ces développements; ceux-ci n'interviendront que pour permettre de donner aux résultats une forme particulière simple, précise, unique et caractéristique.

On a supposé jusqu'ici que la fonction F était périodique par rapport à chaque variable. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction continue qui admet p périodes propres distinctes. Nous savons qu'il existe une substitution linéaire à déterminant non nul qui transforme la fonction F en une fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ périodique séparément par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Si $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont les périodes correspondantes, on pourra écrire, en général,

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n)$$
$$= \sum A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{y_1}{b_1} + m_2 \frac{y_2}{b_2} + \ldots + m_p \frac{y_p}{b_p}\right) + B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{y_1}{b_1} + \ldots + m_p \frac{y_p}{b_p}\right),$$

les coefficients A et B étant ici des fonctions de $y_{p+1}, \ldots, y_n$ données par les formules

$$A = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_p} \int_0^{b_1} \ldots \int_0^{b_p} \Phi \cos 2\pi\left(m_1 \frac{y_1}{b_1} + \ldots + m_p \frac{y_p}{b_p}\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_p,$$

$$B = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_p} \int_0^{b_1} \ldots \int_0^{b_p} \Phi \sin 2\pi\left(m_1 \frac{y_1}{b_1} + \ldots + m_p \frac{y_p}{b_p}\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_p.$$

Par la substitution inverse on obtiendra un développement contenant explicitement les anciennes variables et l'on aura, en quelque sorte, séparé les éléments périodiques qui entrent dans la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$; quant

aux coefficients A et B ils ne seront pas, en général, périodiques. Ceci ne suppose rien sur la réductibilité des fonctions F ou Φ.

Si la fonction F est réductible à q variables et périodique d'ordre p, on peut la développer en une série dans laquelle les coefficients A et B contiennent seulement $q-p$ variables, et il est impossible de former un développement trigonométrique dans lequel ces coefficients contiennent moins de $q-p$ variables.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction, de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par rapport aux variables respectives $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que nous supposons développable en série uniformément convergente de Fourier. Si elle est réductible à p variables, nous savons que par une transformation de la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_1}{\alpha_1} = \mu_1^1 \dfrac{x_1}{a_1} + \mu_2^1 \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^1 \dfrac{x_n}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{y_p}{\alpha_p} = \mu_1^p \dfrac{x_1}{a_1} + \mu_2^p \dfrac{x_p}{a_p} + \ldots + \mu_n^p \dfrac{x_n}{a_n} \end{array}\right\} \quad \mu_i^j \text{ entiers,}$$

on peut la ramener à la fonction irréductible $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ périodique en $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. On peut développer Φ en série uniformément convergente dont le terme général sera de la forme

$$(12)\quad A\cos 2\pi\left(q_1\frac{y_1}{\alpha_1} + q_2\frac{y_2}{\alpha_2} + \ldots + q_p\frac{y_p}{\alpha_p}\right) + B\sin 2\pi\left(q_1\frac{y_1}{\alpha_1} + \ldots + q_p\frac{y_p}{\alpha_p}\right).$$

Si dans les termes de cette série on remplace $y_1, y_2, \ldots, y_p$ par leurs expressions (11), on retombe sur la série primitive en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont indépendantes, et si l'on détermine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ par les formules

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_1^1}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^1}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{1}{\alpha_p} = \dfrac{\mu_1^p}{a_1} + \ldots + \dfrac{\mu_n^p}{a_n}, \end{array}$$

le développement (12) coïncide avec le développement primitif chaque fois que l'on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_p = x.$$

Faisons encore la remarque suivante : soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction continue de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et développable en série uniformément convergente de Fourier

$$(13)\quad A_0 + \sum A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right),$$

la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$ étant exclue dans les termes qui figurent sous le signe $\sum$. On a pour la constante A_0

$$(14)\qquad A_0 = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \int\int \ldots \int F\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

L'intégrale du second membre est étendue au domaine parallélépipédique dont l'origine est un sommet, et $(a_1, 0, \ldots, 0), (0, a_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, a_n)$ les coordonnées des sommets adjacents à l'origine. Considérant ce parallélépipède P comme fondamental, on obtient tous les autres, en prenant comme sommets adjacents à l'origine les points de coordonnées

$$(P')\qquad \left\{\begin{array}{llll} \mu_1^1 a_1, & \mu_2^1 a_2, & \ldots, & \mu_n^1 a_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \mu_1^n a_1, & \mu_2^n a_2, & \ldots, & \mu_n^n a_n, \end{array}\right.$$

où les coefficients μ_i^j sont des entiers satisfaisant à la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \ldots & \mu_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^n & \ldots & \mu_n^n \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Je dis que l'intégrale (14), si elle est étendue au parallélépipède P′, garde au signe près la même valeur A_0. Effectuons, en effet, la substitution linéaire

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{a_1} = \mu_1^1 \dfrac{y_1}{a_1} + \mu_1^2 \dfrac{y_2}{a_2} + \ldots + \mu_1^n \dfrac{y_n}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{x_n}{a_n} = \mu_n^1 \dfrac{y_1}{a_1} + \mu_n^2 \dfrac{y_2}{a_2} + \ldots + \mu_n^n \dfrac{y_n}{a_n}; \end{array}\right.$$

la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ devient une fonction $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dont

le développement en série de Fourier s'obtient en remplaçant dans (13) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au moyen des formules (15). L'expression

$$m_1 \frac{x_1}{a_1} + m_2 \frac{x_2}{a_2} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}$$

devient

$$p_1 \frac{y_1}{a_1} + p_2 \frac{y_2}{a_2} + \ldots + p_n \frac{y_n}{a_n},$$

et les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne peuvent être nuls que si l'on a

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0.$$

Il suit de là que l'on a

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n \mathrm{A}_0 &= \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \ldots \int_0^{a_n} \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n. \end{aligned}$$

Dans la deuxième de ces intégrales effectuons le changement de variables indiqué par les formules (15); la fonction Φ devient $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, le domaine d'intégration devient justement le parallélépipède P′, et l'on a d'autre part

$$\frac{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\Delta},$$

d'où, par conséquent,

$$\int\int \ldots \int_{(\mathrm{P})} \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\Delta} \int\int \ldots \int_{(\mathrm{P}')} \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n;$$

ce qui établit la proposition.

Si l'on remarque que la fonction F étant développable en série de Fourier, il en est de même de la fonction $\mathrm{F} \cos 2\pi \left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n} \right)$, on voit que le même théorème s'applique aux intégrales

$$\int\int \ldots \int \mathrm{F} \cos 2\pi \left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n} \right) dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\int\int \ldots \int \mathrm{F} \sin 2\pi \left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n} \right) dx_1 \ldots dx_n.$$

J'établirai maintenant une propriété d'une grande importance et qui nous permettra, dans un grand nombre de cas, de donner aux développements trigonométriques une forme spéciale. Pour plus de simplicité je me bornerai dans l'exposition au cas de deux variables.

Soit $F(x, y)$ *une fonction continue de périodes a et b en* x, y. *On peut toujours développer cette fonction en une série simple uniformément convergente de la forme*

$$F(x, y) = \sum [A_k + U_k(x, y)]; \tag{16}$$

A_k *est une constante,* $U_k(x, y)$ *une somme finie de termes de la forme*

$$A_{m,n} \cos 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right) + B_{m,n} \sin 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right), \tag{17}$$

où m et n désignent des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls, la combinaison $m = n = 0$ étant toutefois exclue.

Considérons l'expression $\cos 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right)$ par exemple, où m et n sont des entiers donnés fixes; elle peut figurer dans plusieurs termes U_k; d'une façon générale désignons par A'_k son coefficient (qui peut être nul) dans U_k; *la série* $\sum A'_k$ *est convergente*. Il suffit pour le voir d'effectuer terme à terme (ce qui est possible à cause de la convergence uniforme) l'intégration

$$\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x, y) \cos 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right) dx\, dy.$$

Cette intégrale représente précisément la somme $\sum A'_k$. En particulier, la série formée avec les constantes A_k est convergente, et nous poserons

$$A_0 = \sum A_k = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x, y)\, dx\, dy,$$

de sorte que l'on pourra mettre le développement (16) sous la forme

$$F(x, y) = A_0 + \sum U_k(x, y), \tag{18}$$

U_k étant, comme nous l'avons dit, une somme finie de termes (17) où les entiers m, n ne sont jamais supposés nuls à la fois.

Ceci posé, j'arrive au théorème sur lequel je veux appeler particulièrement l'attention.

Soient μ et ν deux entiers fixes quelconques positifs ou négatifs. Supposons que dans le terme général U_k de la série (18) on prenne tous les termes de la forme (17) pour lesquels les entiers m et n sont de la forme

$$m = p\mu, \qquad n = p\nu,$$

p étant un entier quelconque positif ou négatif, et désignons par $u_k(x, y)$ la somme de tous ces termes dans U_k, la série

$$S_{\mu,\nu}(x, y) = \sum u_k(x, y)$$

est uniformément convergente.

Supposons d'abord les entiers μ *et* ν *premiers entre eux*, et envisageons l'intégrale

$$(19) \qquad I_{\mu,\nu} = \int_0^1 F(x - a\nu\lambda, y + b\mu\lambda)\, d\lambda;$$

la série (18) étant uniformément convergente, on peut effectuer cette intégration terme à terme, et l'on aura à calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^1 \cos 2\pi \left[m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} + \lambda(n\mu - m\nu) \right] d\lambda,$$

$$\int_0^1 \sin 2\pi \left[m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} + \lambda(n\mu - m\nu) \right] d\lambda.$$

Or, ces intégrales sont nulles si l'on n'a pas

$$n\mu - m\nu = 0;$$

si, au contraire,

$$\frac{m}{\mu} = \frac{n}{\nu} = p \qquad (p \text{ nécessairement entier}),$$

elles sont égales, respectivement, à

$$\cos 2\pi p\left(\mu\frac{x}{a}+\nu\frac{y}{b}\right),\quad \sin 2\pi p\left(\mu\frac{x}{a}+\nu\frac{y}{b}\right),$$

de sorte que l'intégration relative au terme U_k donne précisément u_k. La série $\sum u_k$ est donc uniformément convergente et a pour somme

$$S_{\mu,\nu}=\sum u_k=I_{\mu,\nu}-A_0.$$

On remarquera que si l'on pose

$$z=2\pi\left(\mu\frac{x}{a}+\nu\frac{y}{b}\right),$$

la fonction $S_{\mu,\nu}$ est une fonction de la seule variable z, périodique et de période 2π par rapport à cette variable. D'ailleurs, on a manifestement

$$S_{\mu,\nu}=S_{-\mu,-\nu}.$$

Supposons maintenant que les entiers μ et ν aient un diviseur commun, nous les désignerons par μ' et ν', réservant les lettres μ, ν aux quotients de μ' et ν' par leur plus grand commun diviseur q,

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\nu'}{\nu}=q.$$

De même nous désignerons par u'_k la somme des termes de U_k pour lesquels $m=p\mu'$, $n=p\nu'$, et enfin par u_k la somme des termes de U_k pour lesquels $\frac{m}{\mu}=\frac{n}{\nu}$. Il est bien facile de voir comment on peut déduire u'_k de u_k. Soit, en effet,

$$A\cos 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)+B\sin 2\pi\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)$$

un terme de u'_k; on peut l'écrire

$$A\cos 2\pi pq\left(\mu\frac{x}{a}+\nu\frac{y}{b}\right)+B\sin 2\pi pq\left(\mu\frac{x}{a}+\nu\frac{y}{b}\right);$$

il appartient donc à u_k. Si nous posons

$$z = 2\pi\left(\mu\frac{x}{a} + \nu\frac{y}{b}\right),$$

nous sommes finalement ramenés au problème suivant :

Étant donnée une fonction $S_{\mu,\nu}(z)$ *de période* 2π, *développée en une série uniformément convergente de la forme*

$$S_{\mu,\nu}(z) = \sum u_k(z),$$

$u_k(z)$ *étant une somme finie de termes de la forme*

$$A\cos nz + B\sin nz;$$

si l'on prend dans $u_k(z)$ *tous les termes de cette forme pour lesquels l'entier* n *est un multiple de l'entier fixe* q, *et désignant leur somme par* $u'_k(z)$ *il faut montrer que la série* $\sum u'_k(z)$ *est uniformément convergente.*

Or, cette dernière proposition est immédiate; il suffit en effet de former la somme

$$(20)\qquad \frac{1}{q}\left\{S_{\mu,\nu}(z) + S_{\mu,\nu}\left(z + \frac{2\pi}{q}\right) + \ldots + S_{\mu,\nu}\left(z + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right)\right\}$$

pour obtenir une série dans laquelle tous les termes pour lesquels n n'est pas un multiple de q sont éliminés. Il reste finalement la série $\sum u'_k(z)$ dont la somme est égale à la quantité (20). La proposition est complètement établie.

Ainsi les séries que nous venons d'étudier sont, dans tous les cas, uniformément convergentes; leurs sommes $S_{\mu,\nu}$ sont indépendantes des séries particulières qui ont servi à les définir, puisqu'on peut écrire

$$S_{\mu,\nu} = \int_0^1 F(x - a\nu\lambda,\ y + b\mu\lambda)\,d\lambda - A_0$$

si μ et ν sont premiers entre eux; si au contraire μ' et ν' sont deux entiers

admettant q comme plus grand diviseur, en posant

$$\mu = \frac{\mu'}{q}, \qquad \nu = \frac{\nu'}{q},$$

on écrira

$$(21)\quad S_{\mu',\nu'} = \frac{1}{q}\int_0^1 \left\{ F(x - a\nu\lambda, y + b\mu\lambda) + F\left(x + \frac{a}{q} - a\nu\lambda, y + \frac{b}{q} + b\mu\lambda\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + F\left(x + \frac{(q-1)a}{q} - a\nu\lambda, y + \frac{(q-1)b}{q} + b\mu\lambda\right)\right\} d\lambda - A_0.$$

Démontrons encore que, *lorsque l'un des entiers* μ, ν, *ou tous deux, augmentent indéfiniment, les fonctions correspondantes* $S_{\mu,\nu}$ *ont pour limite* 0.

Supposons, par exemple, μ et ν premiers entre eux. La série (18) étant uniformément convergente, on pourra écrire

$$F(x, y) = A_0 + F_1(x, y) + R(x, y),$$

$F_1(x, y)$ étant une *somme finie de termes* de la forme (17) ($m = n = 0$ exclu) et $R(x, y)$ une fonction périodique inférieure en module à ε, quels que soient x et y : on peut prendre μ et ν assez grands pour que F_1 ne contienne aucun terme pour lequel $m = p\mu$, $n = p\nu$. On aura dans ces conditions

$$\int_0^1 F_1(x - a\nu\lambda, y + b\mu\lambda)\, d\lambda = 0$$

et, par suite,

$$S_{\mu,\nu} = I_{\mu\nu} - A_0 = \int_0^1 R(x - a\nu\lambda, y + b\mu\lambda)\, d\lambda,$$

et puisque

$$|R| < \varepsilon,$$

on aura aussi

$$|S_{\mu,\nu}| < \varepsilon.$$

La démonstration ne demande presque aucune modification dans le cas où les entiers μ et ν ne sont pas premiers entre eux.

J'envisagerai maintenant d'une façon toute particulière *les fonctions* $S_{\mu,\nu}$

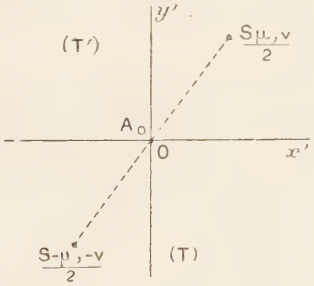
correspondant à des systèmes d'entiers μ, ν *premiers entre eux* qui, à part cette condition, seront arbitraires, c'est-à-dire positifs, négatifs ou nuls, la combinaison $\mu = \nu = 0$ exclue; si l'un des entiers μ, ν est nul, l'autre sera égal à ± 1, les lettres μ, ν employées sans accents seront dans la suite exclusivement réservées comme indices à ces fonctions.

L'ensemble des fonctions $S_{\mu,\nu}$ est bien déterminé lorsqu'on connaît la fonction $F(x, y)$ et, lorsqu'on possède un développement trigonométrique de cette dernière, on obtient immédiatement les fonctions $S_{\mu,\nu}$ sous forme de séries trigonométriques uniformément convergentes. Il faut remarquer qu'un couple d'entiers μ, ν premiers entre eux donne naissance à quatre fonctions : $S_{\mu,\nu}$, $S_{-\mu,-\nu}$, $S_{-\mu,\nu}$, $S_{\mu,-\nu}$; on a manifestement $S_{\mu,\nu} = -S_{-\mu,-\nu}$, mais il n'y a pas, en général, entre les autres fonctions de relations particulières.

On verrait aisément que deux fonctions possédant le même ensemble de fonctions $S_{\mu,\nu}$ sont identiques.

Une question très importante se pose immédiatement. Imaginons deux axes de coordonnées ox', oy'; à l'origine plaçons le terme A_0, et au point

Fig. 4.



de coordonnées μ, ν (premiers entre eux) plaçons le terme $\frac{1}{2} S_{\mu,\nu}$. Nous formons ainsi un Tableau (T') dont la convergence se définira à la façon habituelle par la considération de courbes grandissant indéfiniment dans tous les sens autour de l'origine (*fig.* 4).

Le Tableau (T') est-il convergent en général et, dans ce cas, quelle est sa somme? Le cas le plus simple est celui où $F(x, y)$ est la somme d'un nombre fini de termes de la forme (17). Le Tableau (T') se compose alors d'un nombre limité de termes dont la somme est manifestement égale à $F(x, y)$.

Dans tous les cas, si le Tableau (T′) est uniformément convergent, sa somme est nécessairement égale à $F(x, y)$. En effet, en désignant par $F'(x, y)$ la somme du Tableau (T′), cette fonction admet comme fonctions $S_{\mu,\nu}$ celles qui figurent dans le Tableau (T′). Pour le voir, il suffit de remarquer que l'on peut représenter F′ avec l'approximation $\frac{\varepsilon}{2}$ au moyen d'un nombre fini q de séries $S_{\mu,\nu}$ [1]. Dans chacune de ces dernières on peut prendre un nombre fini de termes de façon que le reste soit en valeur absolue inférieur à $\frac{\varepsilon}{2q}$ de sorte que F′ serait finalement représenté avec l'approximation ε par un nombre fini de termes de la forme (17) appartenant au développement de $F(x, y)$ et comprenant jusqu'à un certain ordre tous les termes de celui-ci. En choisissant des approximations ε de plus en plus petites, tendant vers zéro, on serait ainsi conduit à un développement particulier de la fonction $F'(x, y)$ dont la somme ne pourrait différer de $F(x, y)$.

Mais le Tableau (T′) n'est pas nécessairement convergent, et le problème qui consisterait à rechercher les conditions les plus générales de cette convergence paraît difficile. Il est pourtant des cas très étendus où cette convergence est assurée.

Supposons que la fonction $F(x, y)$ *soit développable en série de Fourier absolument et uniformément convergente*

$$F(x, y) = A_0 + \sum A_{m,n} \cos 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right) + B_{m,n} \sin 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right),$$

et posons

$$u_{m,n} = A_{m,n} \cos 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right) + B_{m,n} \sin 2\pi\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b}\right).$$

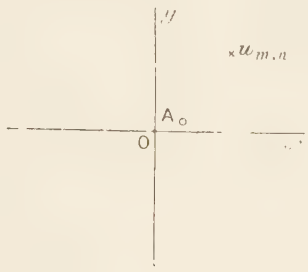
A côté du Tableau (T′) considérons le Tableau (T), obtenu en plaçant au point de coordonnées m, n le terme $u_{m,n}$, et au point O (*fig.* 5) la constante A_0. Le Tableau (T) est, par hypothèse, absolument et uniformé-

---

[1] On suppose, et c'est toujours possible, que les fonctions $S_{\mu,\nu}$ ont été obtenues au moyen d'un développement en série de la fonction $F(x, y)$, développement de la forme (18) par exemple.

ment convergent et a pour somme $F(x, y)$. Les séries $S_{\mu,\nu}$ s'obtiennent en

Fig. 5.



considérant tous les termes de (T) situés sur une même droite issue de l'origine, à l'exclusion de la constante A_0.

Il est évident d'abord que les séries $S_{\mu,\nu}$ sont absolument convergentes. Le Tableau (T′) est lui-même absolument convergent. Soit, en effet, $\Phi(x, y)$ la somme du Tableau (T_1) obtenu en remplaçant dans (T) chaque terme $u_{m,n}$ par son module, et soit de même (T'_1) le Tableau obtenu en remplaçant dans (T′) chaque terme $\frac{S_{\mu,\nu}}{2}$ par son module. Il est clair que dans le Tableau (T'_1) la somme des termes contenus à l'intérieur d'une courbe C quelconque est toujours inférieure à Φ, ce qui établit la convergence absolue du Tableau (T′). On pourrait considérer la proposition comme établie en vertu d'une remarque faite plus haut, mais à cause de son importance j'en donnerai une démonstration directe.

Soient une suite de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ grandissant indéfiniment dans tous les sens autour de l'origine, par exemple des rectangles de centre O; traçons ces courbes à la fois dans les Tableaux (T), (T_1), (T′) et (T'_1). Désignons par $F_p(x, y)$ la somme des termes de (T) contenus dans la courbe C_p et par $\Phi_p(x, y)$ la somme des termes de (T_1) contenus dans C_p. Le Tableau des modules (T_1) étant convergent, Φ_p a pour limite Φ. Désignons de même par $F'_p(x, y)$ la somme des termes de (T′) contenus dans C_p. La somme $F'_p(x, y)$ contient d'abord tous les termes de $F_p(x, y)$, plus les restes des séries $S_{\mu,\nu}$ quand on arrête celles-ci à la courbe C_p. On a donc

$$|F'_p(x, y) - F_p(x, y)| < \Phi - \Phi_p.$$

Or, $\Phi - \Phi_p$ a pour limite zéro, donc $F'_p(x, y)$ a une limite, et cette limite

est celle de $F_p(x, y)$, c'est-à-dire $F(x, y)$. Comme la suite $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p, \ldots$ est uniformément convergente, il en est nécessairement de même de la suite $F'_1(x, y), \ldots, F'_p(x, y), \ldots$.

On pourra donc écrire dans ce cas

$$F(x, y) = A_0 + \tfrac{1}{2}\sum S_{\mu,\nu}(x, y), \tag{22}$$

le second membre [1] représentant la somme du Tableau uniformément convergent (T'). D'ailleurs, si un tel développement est possible, il est unique, puisque les fonctions $S_{\mu,\nu}$ qui y figurent sont données par les intégrales $I_{\mu,\nu} - A_0$.

Les résultats précédents s'étendent sans difficulté aux fonctions périodiques d'un nombre quelconque de variables.

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction continue périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En posant

$$A_0 = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\cdots\int_0^{a_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

on peut toujours développer F en une série simple uniformément convergente

$$F = A_0 + \sum U_k \tag{23}$$

où U_k est une somme finie de termes de la forme

$$A\cos 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n\frac{x_n}{a_n}\right) + B\sin 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n\frac{x_n}{a_n}\right) \tag{24}$$

dans lesquels $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs, négatifs ou nuls, la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$ exclue. Si l'on se donne arbitrairement les entiers fixes quelconques $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et si, dans U_k, on prend tous les termes de la forme (24) pour lesquels

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{m_n}{\mu_n} = p,$$

---

[1] Le facteur $\frac{1}{2}$ provient de ce fait qu'au terme $S_{\mu,\nu}$ correspond son égal $S_{-\mu,-\nu}$.

p étant un entier quelconque positif ou négatif, et désignant par u_k leur somme, *la série* $\sum u_k$ *est uniformément convergente*. On distinguera encore deux cas :

1° Les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ n'ont pas de diviseur commun. Alors la somme de la série $\sum u_k$ peut s'exprimer par une intégrale définie simple, que l'on obtiendra de la façon suivante : Soit un Tableau de $n(n-1)$ entiers

$$\left\| \begin{matrix} r_1^1 & r_1^2 & \ldots & r_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n-1}^1 & \ldots & \ldots & r_{n-1}^n \end{matrix} \right\|$$

assujettis à ces conditions qu'il y ait dans ce Tableau un déterminant d'ordre $(n-1)$ différent de zéro et que l'on ait, de plus,

$$\begin{gathered} r_1^1 \mu_1 + r_1^2 \mu_2 + \ldots + r_1^n \mu_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-1}^1 \mu_1 + r_{n-1}^2 \mu_2 + \ldots + r_{n-1}^n \mu_n = 0. \end{gathered}$$

Considérons ensuite les formes linéaires en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 (r_1^1 \lambda_1 + r_2^1 \lambda_2 + \ldots + r_{n-1}^1 \lambda_{n-1}), \\ P_2 &= a_2 (r_1^2 \lambda_1 + \ldots\ldots\ldots + r_{n-1}^2 \lambda_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_n &= a_n (r_1^n \lambda_1 + \ldots\ldots\ldots + r_{n-1}^n \lambda_{n-1}); \end{aligned}$$

la série $A_0 + \sum u_k$ a alors pour somme l'intégrale

$$I_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1 + P_1, x_2 + P_2, \ldots, x_n + P_n)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

On aura ici encore

$$S_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} = \sum u_k = I_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} - A_0.$$

La fonction $S_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}$ est une fonction périodique, et de période 2π, de la seule variable

$$z = 2\pi \left(\mu_1 \frac{x_1}{a_1} + \mu_2 \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \mu_n \frac{x_n}{a_n} \right).$$

2° Si maintenant $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n$ sont des entiers qui ont pour plus grand diviseur q, en posant

$$\mu_1 = \frac{\mu'_1}{q}, \quad \ldots, \quad \mu_n = \frac{\mu'_n}{q}$$

on aura

$$S_{\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n} = \frac{1}{q}\left\{S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(z) + S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\left(z + \frac{2\pi}{q}\right) + \ldots + S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\left(z + \frac{2(q-1)\pi}{q}\right)\right\}.$$

Envisageons enfin les fonctions $S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}$ correspondant à tous les systèmes d'entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *premiers entre eux* (¹); on démontrera, comme précédemment, que *si la fonction* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *est développable en série de Fourier absolument et uniformément convergente, la série multiple*

$$A_0 + \tfrac{1}{2}\sum S_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}$$

est uniformément et absolument convergente et représente

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

de plus, si un tel développement existe il est unique.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES UNIFORMÉMENT CONTINUES.

Développements en séries de Fourier. — Soit $f(x)$ une fonction quasi-périodique uniformément continue attachée au champ des périodes a_1, $a_2, \ldots, a_n$, celles-ci étant indépendantes ou non.

Si les périodes sont indépendantes, la fonction associée sur le champ total $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue, périodique, définie pour toutes les valeurs des variables et vérifie l'identité

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x); \tag{1}$$

c'est d'ailleurs dans ce cas la seule fonction qui jouisse de ces propriétés.

(¹) Si plusieurs de ces entiers sont nuls, les autres doivent être premiers entre eux; si tous sont nuls à l'exception d'un seul, celui-ci doit être égal à ± 1.

Si les périodes données sont dépendantes, il existe encore des fonctions continues $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définies pour toutes les valeurs des variables, périodiques et de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et vérifiant $f(x) = F(x, x, \ldots, x)$; mais, dans ce cas, il en existe une infinité.

Soit, dans tous les cas, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction satisfaisant à ces propriétés. On pourra développer F en série de la forme

$$F = \sum U_k,$$

où U_k est une somme finie de termes de la forme

$$(2) \qquad A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) = B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right).$$

On peut même en écrire le développement

$$(3) \qquad F = A_0 + \sum U_k$$

et supposer que, dans les termes de la forme (2) composant U_k, la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$ est toujours exclue.

Si, dans le développement (3), on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

on obtient un développement particulier pour $f(x)$

$$(4) \qquad f(x) = A_0 + \sum P_k(x),$$

$P_k(x)$ étant la valeur que prend U_k pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, c'est-à-dire une somme finie de termes de la forme

$$(5) \qquad A \cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right);$$

c'est, à la forme près, le développement de M. Bohl dont il a été déjà parlé (p. 4 et p. 122).

Supposons maintenant que la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit dévelop-

pable en série de Fourier

$$(6)\quad F = A_0 + \sum A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right);$$

on aura alors pour $f(x)$ le développement uniformément convergent

$$(7)\quad f(x) = A_0 + \sum A \cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right),$$

où le second membre est une série multiple, les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ prenant toutes les valeurs positives, négatives ou nulles, à l'exception de la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$.

Dans tous les cas, on remarquera que les périodes a des sinus ou cosinus qui figurent dans ces divers développements vérifient des relations de la forme

$$(8)\quad \frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n};$$

ce sont les périodes du corps réduit défini par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dans le cas le plus général, celui où $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ serait un système quelconque de périodes dont le champ est attaché à $f(x)$, certaines des périodes (8) pourraient n'avoir aucun rapport avec les périodes du corps fondamental attaché à $f(x)$. De plus, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dépendantes, à des systèmes d'entiers distincts $m_1, m_2, \ldots, m_n$ peuvent, par la formule (8), correspondre la même période a, de sorte que dans le développement (7) les termes correspondant à ces systèmes d'entiers fournissent les mêmes fonctions $\cos 2\pi \frac{x}{a}$, $\sin 2\pi \frac{x}{a}$.

Le problème le plus important qu'on puisse se poser vis-à-vis des développements de la forme (7) est le suivant :

Les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dont le champ A *est attaché à la fonction $f(x)$, étant données, le développement est-il unique?*

En d'autres termes, si l'on a deux développements de cette espèce, les

termes correspondant aux *mêmes systèmes d'entiers* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont-ils nécessairement identiques ?

Il est clair que, si les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont dépendantes, le développement n'est pas unique; en effet, ce développement contenant des termes différents, quant aux systèmes d'entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, mais de mêmes périodes, on peut modifier leurs coefficients sans changer la somme de la série.

Supposons maintenant que les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient *indépendantes*. Toutes les périodes a données par la formule (8) et figurant dans les sinus ou cosinus du développement (7) sont alors distinctes [1]. Dans ce cas, le développement (7) est unique. On peut le montrer de plusieurs façons. Tout d'abord, on verrait sans peine que le développement

$$A_0 + \sum A \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{a_1} + \ldots + m_n \frac{x_n}{a_n}\right)$$

est lui-même uniformément convergent; sa somme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la fonction associée de $f(x)$ sur le champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et, comme F est développable en série de Fourier, les coefficients A et B seraient donc parfaitement déterminés.

On peut le voir aussi d'une autre façon, en se servant d'une expression différente des coefficients A et B que nous allons indiquer. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \cos 2\pi \frac{x}{a} \cos 2\pi \frac{x}{h} dx :$$

1° $a^2 \neq h^2$, on obtient immédiatement la fonction primitive

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{h}} \sin 2\pi x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{h}\right)} \sin 2\pi x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{h}\right)\right]$$

---

[1] Bien entendu nous supposons toujours que les coefficients (A, B), (A′, B′) correspondant aux deux systèmes d'entiers $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ $(-m_1, -m_2, \ldots, -m_n)$ satisfont aux conditions $A = A'$, $B = -B'$.

et, dans ce cas, l'expression

$$J = \frac{1}{x}\int_0^x \cos 2\pi \frac{x}{a} \cos 2\pi \frac{x}{h}\, dx$$

a pour limite o lorsque x augmente indéfiniment;

2° $a^2 = h^2$, on a alors

$$J = \frac{1}{2} + \frac{a}{8\pi x} \sin 4\pi \frac{x}{a}.$$

J a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque x augmente indéfiniment.

On obtient des résultats analogues relativement à l'intégrale

$$\frac{1}{x}\int_0^x \sin 2\pi \frac{x}{a} \sin 2\pi \frac{x}{h}\, dx$$

qui a pour limite o si $a^2 \neq h^2$ et pour limite $\pm \frac{1}{2}$ si $a = \pm h$.

Enfin, on vérifie aisément que

$$\frac{1}{x}\int_0^x \cos 2\pi \frac{x}{a} \sin 2\pi \frac{x}{h}\, dx$$

a toujours pour limite o lorsque x augmente indéfiniment.

Ceci posé, considérons la série

$$(8\,bis) \quad f(x) = A_0 + \sum A \cos 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)$$

qui est par hypothèse uniformément convergente. Nous représentons la convergence de la série toujours de la même façon, c'est-à-dire que, dans un espace à n dimensions, nous plaçons au point de coordonnées $m_1, \ldots, m_n$ le terme

$$(9) \quad u_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = A \cos 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B \sin 2\pi x \left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right).$$

Si nous considérons une suite de domaines $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ grandissant indéfiniment, étant donné ε nous pourrons trouver un domaine C_k de façon qu'en désignant par $f_k(x)$ la somme des termes de la série (8 *bis*)

compris dans C_k, on ait, *quel que soit* x,

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Posons

$$R_k(x) = f(x) - f_k(x),$$

et calculons l'intégrale

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{x}\int_0^x f_k(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx + \frac{1}{x}\int_0^x R_k(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

f_k est la somme d'un nombre fini de termes de la forme (9), par conséquent, $\frac{1}{x}\int_0^x f_k(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx$ a une limite pour x infini. Or cette limite se réduit à la somme des limites relatives aux deux termes $u_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ et $u_{-m_1, -m_2, \ldots, -m_n}$, et à ceux-là seulement puisque les périodes a_1, a_2, ..., a_n sont indépendantes; par conséquent, en supposant bien entendu que le domaine C_k contienne les termes $u_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$, $u_{-m_1, -m_2, \ldots, -m_n}$,

$$\lim \frac{1}{x}\int_0^x f_k(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx = A.$$

D'autre part, on a, quel que soit x,

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x R_k(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx\right| < \varepsilon,$$

par conséquent, puisque ε est arbitraire,

$$A = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx.$$

On trouvera de même

$$B = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\sin 2\pi\frac{x}{a}\,dx.$$

Ceci montre bien que, si le développement (8 *bis*) existe, il est unique.

Le même raisonnement s'applique à un cas un peu plus général. Supposons, ce qu'on peut toujours faire, qu'on ait développé $f(x)$ en une série simple uniformément convergente

$$f(x) = A_0 + \sum P_k(x),$$

$P_k(x)$ étant une somme finie de termes de la forme (9). La même fonction $\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)$ peut entrer dans divers termes P_k; désignons par A_k son coefficient dans P_k (A_k peut être nul).

La série $\sum A_k$ *est convergente et a pour somme*

$$\lim \frac{2}{x}\int_0^x f(x)\cos 2\pi \frac{x}{a}\,dx,$$

en posant toujours

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n};$$

le facteur 2 provient ici de ce fait que nous ne faisons plus de distinction entre les termes

$$\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) \quad \text{et} \quad \cos 2\pi x\left(\frac{-m_1}{a_1} + \frac{-m_2}{a_2} + \ldots + \frac{-m_n}{a_n}\right).$$

Une conclusion analogue se déduirait de la même façon relativement aux coefficients de la fonction $\sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)$. Ces derniers résultats se trouvent d'ailleurs sous une forme à peine différente dans le travail de M. Bohl.

Voici encore un résultat important qui se démontre par le même procédé :

Si a est un nombre ne vérifiant aucune relation de la forme

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers quelconques positifs ou négatifs, les quantités

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\cos 2\pi \frac{x}{a}\,dx, \quad \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\sin 2\pi \frac{x}{a}\,dx$$

ont pour limite o lorsque x augmente indéfiniment; ceci suppose simplement que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un système de périodes dont le champ est attaché à la fonction $f(x)$.

Or, supposons $f(x)$ quasi-périodique d'ordre p et soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ une base du corps fondamental, les seules périodes qui vérifient des formules de la forme

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p}$$

sont les périodes du corps réduit fondamental attaché à $f(x)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si a est un nombre quelconque qui n'appartient pas au corps réduit fondamental attaché à la fonction quasi-périodique $f(x)$, les quantités

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx, \quad \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\sin 2\pi\frac{x}{a}\,dx$$

ont pour limite o *pour* $x = \infty$.

Cette propriété nous permettra de fixer un point de l'étude des développements en série de Fourier.

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un système de périodes *indépendantes* quelconques dont le champ est attaché à la fonction $f(x)$. Le développement

$$(10)\quad f(x) = A_0 + \sum A\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right) + B\sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right)$$

est unique; mais si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'est pas une *base* du corps réduit fondamental ($n > p$), il se présente dans ce développement des circonstances particulières qu'il importe de signaler : il existe alors une infinité de coefficients A et B qui sont nuls. Posons, en effet,

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n};$$

les nombres a étant ainsi les périodes des lignes trigonométriques qui figurent dans le développement (10). Les coefficients correspondants A et B

sont donnés, comme on l'a vu, par les formules

$$(11)\qquad \begin{cases} A = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx, \\ B = \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int^x f(x)\sin 2\pi\frac{x}{a}\,dx. \end{cases}$$

Or l'ensemble des nombres a peut se diviser en deux parties :

1° Les nombres a appartenant au corps réduit fondamental qui est d'ailleurs tout entier contenu dans l'ensemble (a);

2° Les nombres a qui n'appartiennent pas au corps réduit fondamental; d'après les propriétés précédentes tous les coefficients A et B correspondant à ces périodes sont nuls; de sorte qu'*en réalité les seules périodes a figurant réellement dans le développement* (10) *sont les périodes du corps réduit fondamental attaché à* $f(x)$.

On voit qu'en définitive, les seuls développements caractéristiques sont ceux que l'on obtient en partant d'une base $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ *du corps réduit fondamental*

$$(12)\quad f(x) = A_0 + \sum A\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p}\right) + B\sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p}\right);$$

les autres développements tels que (10), bien que mis sous une forme différente, contiennent exactement les mêmes termes. Les coefficients A et B sont donnés par les formules (11) où l'on a posé

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p};$$

ou encore, si l'on désigne par $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ l'associée de $f(x)$, par les formules

$$A = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\int_0^{\alpha_1}\cdots\int_0^{\alpha_p} F(x_1, x_2, \ldots, x_p)\cos 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p\frac{x_p}{\alpha_p}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_p,$$

$$B = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\int_0^{\alpha_1}\cdots\int_0^{\alpha_p} F(x_1, x_2, \ldots, x_p)\sin 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p\frac{x_p}{\alpha_p}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_p.$$

La forme précise que nous donnons au développement (12) est subor-

donnée au choix de la base $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ dans le corps réduit fondamental. Si l'on choisit dans ce corps une autre base $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$, on obtiendra un autre développement

$$(13) \quad f(x) = A'_0 + \sum A' \cos 2\pi x \left(\frac{n_1}{\beta_1} + \frac{n_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{n_p}{\beta_p}\right) + B' \sin 2\pi x \left(\frac{n_1}{\beta_1} + \ldots + \frac{n_p}{\beta_p}\right).$$

Il est facile de voir qu'il existe entre ces deux développements une correspondance très simple. Soient, en effet,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\beta_1} = \dfrac{\mu_1^1}{\alpha_1} + \dfrac{\mu_2^1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{\mu_p^1}{\alpha_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{\beta_p} = \dfrac{\mu_1^p}{\alpha_1} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{\mu_p^p}{\alpha_p} \end{array}\right\} \quad \mu_i^j \text{ entiers}$$

les relations de dépendance qui lient les α aux β. On a d'abord

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^p & \ldots & \ldots & \mu_p^p \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Établissons entre les points de coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dans un premier système d'axes (T), et les points $n_1, n_2, \ldots, n_p$ d'un second système d'axes (T_1), une correspondance définie par les formules

$$\begin{array}{l} \mu_1^1 n_1 + \mu_1^2 n_2 + \ldots + \mu_1^p n_p = m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_p^1 n_1 + \ldots\ldots\ldots + \mu_p^p n_p = m_p. \end{array}$$

Cette correspondance est bien univoque et atteint tous les points de l'un et l'autre système; de plus, lorsqu'un point s'éloigne indéfiniment de l'origine, son correspondant, dans le second système, s'éloigne aussi indéfiniment. On pourra donc, à tout terme de la série (12), faire correspondre un terme bien déterminé de la série (13), et inversement. Je dis que deux termes correspondants dans ces deux séries sont identiques. En effet, on a d'abord, comme on le voit immédiatement,

$$\frac{1}{a} = \frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{m_p}{\alpha_p} = \frac{n_1}{\beta_1} + \frac{n_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{n_p}{\beta_p},$$

et, par suite,

$$(14)\qquad \begin{cases} A = A' = \lim \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx, \\ B = B' = \lim \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(x)\sin 2\pi\frac{x}{a}\,dx, \end{cases}$$

$$A'_0 = A_0.$$

On peut aussi l'établir sans se servir des formules (14). Appelons $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ les associés de $f(x)$ sur les champs des périodes $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)$, $(\beta_1\beta_2\ldots\beta_p)$.

On sait que Φ se déduit de F par la substitution linéaire

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_1}{\beta_1} = \mu_1^1\dfrac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + \mu_p^1\dfrac{x_p}{\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_p}{\beta_p} = \mu_1^p\dfrac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + \mu_p^p\dfrac{x_p}{\alpha_p}. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$A' = \frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\int_0^{\beta_1}\cdots\int_0^{\beta_p}\Phi(y_1, \ldots, y_p)\cos 2\pi\left(n_1\frac{y_1}{\beta_1} + \ldots + n_p\frac{y_p}{\beta_p}\right)dy_1\ldots dy_p.$$

Effectuons sur cette intégrale le changement de variables défini par (15). Il vient alors, en remarquant que

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)} = \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\Delta \qquad (\Delta = \pm 1),$$

$$A' = \frac{\Delta}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\int\int\cdots\int F(x_1, x_2, \ldots, x_p)\cos 2\pi\left(m_1\frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p\frac{x_p}{\alpha_p}\right)dx_1\ldots dx_p.$$

Cette intégrale doit être prise à l'intérieur du parallélépipède P′, dont les sommets adjacents à l'origine ont pour coordonnées

$$\left(\frac{M_1^1}{\Delta}\alpha_1, \frac{M_2^1}{\Delta}\alpha_2, \ldots, \frac{M_p^1}{\Delta}\alpha_p\right), \quad \left(\frac{M_1^2}{\Delta}\alpha_1, \frac{M_2^2}{\Delta}\alpha_2, \ldots, \frac{M_p^2}{\Delta}\alpha_p\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{M_1^p}{\Delta}\alpha_1, \frac{M_2^p}{\Delta}\alpha_2, \ldots, \frac{M_p^p}{\Delta}\alpha_p\right)$$

où M_i^j désigne le coefficient de μ_i^j dans Δ. On déduit de là

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{M_1^1}{\Delta} & \frac{M_2^1}{\Delta} & \cdots & \frac{M_p^1}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{M_1^p}{\Delta} & \frac{M_2^p}{\Delta} & \cdots & \frac{M_p^p}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} = \pm 1$$

et, en appliquant la proposition établie page 179,

$$\int\int\cdots\int_{(P')} F(x_1, \ldots, x_p) \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p \frac{x_p}{\alpha_p}\right) dx_1 \ldots dx_p$$
$$= \Delta' \int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2}\cdots\int_0^{\alpha_p} F(x_1, \ldots, x_p) \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p \frac{x_p}{\alpha_p}\right) dx_1 \ldots dx_p;$$

par suite

$$A' = \frac{\Delta\Delta'}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \int_0^{\alpha_1}\int_0^{\alpha_2}\cdots\int_0^{\alpha_p} F(x_1, \ldots, x_p) \cos 2\pi\left(m_1 \frac{x_1}{\alpha_1} + \ldots + m_p \frac{x_p}{\alpha_p}\right) dx_1 \ldots dx_p = A.$$

On trouverait de même

$$B' = B.$$

Ainsi les termes qui se correspondent dans les séries (12) et (13) sont égaux, et c'est dans ce sens que l'on peut dire que ces séries ne sont pas distinctes.

FONCTIONS S. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Nous avons déjà remarqué (p. 196) que si l'on a le développement

$$f(x) = A_0 + \sum P_k(x),$$

et si l'on prend dans chaque terme $P_k(x)$ le coefficient A_k d'un même terme de la forme

$$\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}\right),$$

la série $\sum A_k$ est convergente.

Mais il y a plus; *soient* $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n$ *des entiers fixes quelconques* (je réserve les lettres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sans accents pour le cas où ces entiers n'ont aucun diviseur commun); *dans chaque terme* P_k *prenons, s'il y en a, tous les termes de la forme*

$$A\cos 2\pi p x\left(\frac{\mu'_1}{a_1}+\frac{\mu'_2}{a_2}+\ldots+\frac{\mu'_n}{a_n}\right)+B\sin 2\pi p x\left(\frac{\mu'_1}{a_1}+\ldots+\frac{\mu'_n}{a_n}\right),$$

p étant un entier quelconque positif ou négatif, et soit u'_k *leur somme dans le terme* P_k; *la série*

$$A_0+\sum u'_k(x)$$

est uniformément convergente. C'est une fonction simplement périodique dont la période a est donnée par

$$\frac{1}{a}=\frac{\mu'_1}{a_1}+\frac{\mu'_2}{a_2}+\ldots+\frac{\mu'_n}{a_n}.$$

Cela résulte immédiatement de ce que nous avons dit (p. 190) sur les fonctions que nous avons appelées $S_{\mu'_1,\mu'_2,\ldots,\mu'_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans l'étude des développements en série des fonctions périodiques de plusieurs variables; il suffit de faire

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=x,$$

pour obtenir immédiatement

$$A_0+\sum u'_k(x)=A_0+S_{\mu'_1,\ldots,\mu'_n}(x, x, \ldots, x).$$

Si les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont premiers entre eux, la fonction S se met sous la forme d'une intégrale définie (*voir* p. 189)

$$S_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}(x,x,\ldots,x)=\int_0^1\cdots\int_0^1 F(x+P_1, x+P_2,\ldots,x+P_n)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}-A_0.$$

Enfin si les entiers $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n$ admettent un plus grand commun diviseur q, en posant

$$\mu_1=\frac{\mu'_1}{q}, \qquad \ldots, \qquad \mu_n=\frac{\mu'_n}{q}$$

et

$$\frac{1}{a} = \frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{a_n},$$

on peut écrire aussi

$$\begin{aligned} &S_{\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n}(x, x, \ldots, x) \\ &= \frac{1}{q}\left\{ S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x, \ldots, x) + S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\left(x + \frac{a}{q}, \ldots, x + \frac{a}{q}\right) + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\left(x + (q-1)\frac{a}{q}, \ldots, x + (q-1)\frac{a}{q}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Envisageons tous les systèmes d'entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, positifs, négatifs ou nuls, mais *premiers entre eux; si la série*

$$A_0 + \tfrac{1}{2} S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x, \ldots, x)$$

est uniformément convergente, sa somme est égale à $f(x)$, et nous avons vu que cette circonstance se présentera toujours lorsque la fonction associée, et par suite la fonction elle-même, est développable en série de Fourier absolument et uniformément convergente.

Dans ce qui précède nous avons supposé simplement que le champ des périodes $a_1 a_2 \ldots a_n$ était un champ quelconque attaché à la fonction $f(x)$.

Examinons d'un peu plus près le cas où l'on part d'une *base de périodes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, *du corps réduit fondamental.*

A tout système d'entiers $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p$ correspond une fonction $S_{\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p}(x, x, \ldots, x)$ que pour simplifier nous désignerons par $S_{\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p}(x)$. Cette fonction est périodique et sa période a est donnée par la relation

$$\frac{1}{a} = \frac{\mu'_1}{\alpha_1} + \frac{\mu'_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\mu'_p}{\alpha_p};$$

c'est une période du corps réduit fondamental.

Ainsi à toute période a du corps réduit fondamental correspond une fonction bien déterminée $S_{\mu'_1, \ldots, \mu'_p}(x)$ *que nous désignerons souvent aussi par le symbole* $S_a(x)$; *l'indice a indiquant la période correspondante.* Mais une question se pose immédiatement. La fonction $S_a(x)$ ainsi obtenue est-elle indépendante de la base $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ que l'on a choisie dans le corps fondamental? En d'autres termes, si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ est une seconde

base de périodes, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{\nu'_1}{\beta_1} + \frac{\nu'_2}{\beta_2} + \ldots + \frac{\nu'_p}{\beta_p},$$

et dans ce système on obtiendra une fonction $\sigma_{\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_p}(x)$ analogue à S; les fonctions S et σ sont-elles identiques? On peut déjà se rendre compte qu'il en est bien ainsi en remarquant que si $S_a(x)$ est développable en série de Fourier

$$S_a(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m \cos 2\pi \frac{mx}{a} + B_m \sin 2\pi \frac{mx}{a},$$

les coefficients A_m et B_m sont donnés par les formules

$$A_m = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) \cos 2\pi \frac{mx}{a}, \qquad B_m = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) \sin 2\pi \frac{mx}{a},$$

qui ne dépendent que de la valeur a.

Nous donnerons plus loin (p. 220) une démonstration rigoureuse de cette propriété, applicable au cas où les fonctions S_a ne sont pas développables en série de Fourier.

Ainsi *à toute période a du corps réduit fondamental correspond une fonction $S_a(x)$ bien déterminée, continue périodique, de période a.*

Parmi les fonctions S celles qui correspondent aux périodes primitives α du corps réduit fondamental ($\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ premiers entre eux) forment une classe à part. Elles paraissent jouer le rôle de véritables facteurs de décomposition dont la somme reproduit la fonction quasi-périodique elle-même. On peut d'ailleurs en déduire toutes les autres fonctions S. En effet, a étant une période quelconque du corps réduit fondamental, il existe une période primitive α, et une seule, dont a est un sous-multiple

$$a = \frac{\alpha}{q};$$

les fonctions S_a et S_α sont alors liées par la formule

$$S_a(x) = \frac{1}{q}\left\{ S_\alpha(x) + S_\alpha\left(x + \frac{\alpha}{q}\right) + \ldots + S_\alpha\left(x + (q-1)\frac{\alpha}{q}\right)\right\}.$$

Les fonctions périodiques $S_a(x)$ ont une moyenne nulle, c'est-à-dire que

$$\int_0^a S_a(x)\,dx = 0.$$

Enfin l'expression des fonctions $S(x)$ au moyen d'intégrales définies montre qu'elles ont une existence propre, indépendante de toute hypothèse sur la nature des développements en séries de la fonction $f(x)$.

Développements en séries de fonctions périodiques. — Donnons-nous une *base* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ du corps réduit fondamental. A tout système d'entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, premiers entre eux, correspondent une période primitive α, donnée par la formule

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\mu_p}{\alpha_p},$$

et une fonction $S_\alpha(x)$. Dans un système d'axes et dans un espace à p dimensions, plaçons au point de coordonnées $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ le terme correspondant $\frac{1}{2} S_\alpha(x)$, et au centre la constante A_0; nous formons ainsi un Tableau qui, s'il est uniformément convergent, représente $f(x)$:

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{2} \sum S_\alpha(x);$$

chaque fonction $S_\alpha(x)$ intervient en réalité deux fois puisque l'on a

$$S_\alpha(x) = S_{-\alpha}(x).$$

Si l'on remarque que deux périodes primitives quelconques (si elles ne sont pas égales et de signes contraires) sont toujours incommensurables, on voit, en rassemblant les termes S_α et $S_{-\alpha}$, *que $f(x)$ se trouve développée en une série multiple, uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions périodiques, les périodes de deux quelconques de ces fonctions étant toujours incommensurables.* Lorsque un ou plusieurs entiers μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_p$ grandissent indéfiniment, la période correspondante α devient soit infiniment grande, soit infiniment petite. La série précédente est une série multiple d'un genre particulier, mais il est clair qu'on pourrait, d'une infinité de manières, la transformer en une série simple.

La considération des fonctions $S_a(x)$ permet d'obtenir une troisième

expression des coefficients qui figurent dans le développement de Fourier. Soit

$$A\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}\right)+B\sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}\right)$$

un terme de ce développement. Désignons par q le plus grand commun diviseur des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ et posons

$$\frac{1}{a}=\frac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}, \qquad \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{q}\left(\frac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}\right);$$

on en conclut immédiatement que

$$A=\frac{1}{a}\int_0^a S_a(x)\cos 2\pi\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha S_\alpha(x)\cos 2\pi q\frac{x}{a}\,dx$$

et

$$B=\frac{1}{a}\int_0^a S_a(x)\sin 2\pi\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha S_\alpha(x)\sin 2\pi q\frac{x}{a}\,dx.$$

On voit, en définitive, qu'il existe des fonctions quasi-périodiques (et ce seront celles que l'on rencontrera habituellement dans les applications) *développables en séries uniformément convergentes dont les termes sont des fonctions simplement périodiques, les périodes de ces fonctions étant deux à deux incommensurables.*

Mais même dans le cas général, on peut démontrer que toute fonction quasi-périodique uniformément continue $f(x)$ est développable en une série simple uniformément convergente

$$f(x)=A_0+\sum\varphi_k(x),$$

dans laquelle le terme général $\varphi_k(x)$ est une somme finie de fonctions $S_\alpha(x)$, et chacune de ces dernières n'entrant qu'une fois dans l'ensemble du développement, c'est-à-dire n'appartenant qu'à un terme au plus de la série $\sum\varphi_k(x)$.

Il reste à se demander si ces développements sont caractéristiques, en d'autres termes, si l'on ne pourrait pas imaginer des développements analogues, dans lesquels les divers termes seraient des fonctions périodiques, ou des sommes de fonctions périodiques distinctes des fonctions S_α, les

périodes de toutes ces fonctions étant deux à deux incommensurables. On verra bientôt que cela est impossible; nous établirons auparavant une nouvelle propriété des fonctions quasi-périodiques, propriété intéressante à d'autres points de vue, et où l'on retrouvera l'importance des fonctions $S(x)$.

FONCTIONS MOYENNES DÉDUITES D'UNE MÊME FONCTION QUASI-PÉRIODIQUE.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Soient $f(x)$ une fonction quasi-périodique uniformément continue, h un nombre réel quelconque; l'expression

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+f(x+2h)+\ldots+f(x+(n-1)h)\},$$

a, quel que soit x, une limite lorsque l'entier n (que l'on peut toujours supposer positif) grandit indéfiniment.

J'appellerai cette limite *une fonction moyenne*, et la désignerai par le symbole

$$[f(x), h]$$

Il résulte de la façon même dont elle est définie, que si la limite $[f(x), h]$ existe, c'est une fonction périodique de x, de période h. Nous établirons en outre que cette limite est une fonction continue de x, et que, relativement à cette variable, la limite est atteinte uniformément, c'est-à-dire que h restant fixe, si l'on se donne ε positif, on peut déterminer ν tel que sous la seule condition $n \geqq \nu$ on ait

$$\left|\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+\ldots+f(x+(n-1)h)\}-[f(x), h]\right|<\varepsilon,$$

et cela quel que soit x.

Considérons d'abord les fonctions simples $\cos x$ et $\sin x$. On a, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{n}\{\cos x+\cos(x+h)+\ldots+\cos(x+(n-1)h)\}=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{n}\,\frac{\cos\left(x+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}};$$

cette formule n'est applicable que si $h \neq 2k\pi$. Si $h = 2k\pi$ le premier membre est égal à $\cos x$ quel que soit n et la proposition est démontrée.

Si $h \neq 2k\pi$ on a

$$\sin\frac{h}{2} \neq 0;$$

le second membre montre que la limite pour $n = \infty$ est égale à 0, et atteinte uniformément par rapport à x, puisque le numérateur est en valeur absolue inférieur à l'unité.

On obtient un résultat analogue en ce qui concerne la quantité

$$\frac{1}{n}\{\sin x + \sin(x+h) + \ldots + \sin(x+(n-1)h)\} = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{n}\,\frac{\sin\left(x+\frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Si $h = 2k\pi$ on a, quel que soit n,

$$\frac{1}{n}\{\cos x + \cos(x+h) + \ldots + \cos(x+(n-1)h)\} = \cos x$$

et une formule analogue pour $\sin x$.

Le théorème est donc établi pour les fonctions trigonométriques simples, et par suite pour les sommes finies de ces fonctions trigonométriques.

Considérons encore les fonctions

$$\cos 2\pi p\frac{x}{a}, \quad \sin 2\pi p\frac{x}{a},$$

où p est un entier; il résulte du théorème précédent que si h est un nombre incommensurable avec la période a, on a nécessairement, quel que soit l'entier p,

$$\left[\cos 2\pi p\frac{x}{a}, h\right] = 0, \qquad \left[\sin 2\pi p\frac{x}{a}, h\right] = 0.$$

Supposons, au contraire, que h soit commensurable avec a

$$h = \frac{ra}{q} \qquad (r, q, \text{ entiers premiers entre eux}),$$

et, au lieu des fonctions sinus et cosinus, considérons le cas plus général d'une fonction périodique continue quelconque $f(x)$ de période a.

Calculons la somme

$$f(x)+f(x+h)+\ldots+f(x+(n-1)h);$$

effectuons pour cela la division de $n-1$ par q et posons

$$n-1=kq+s \qquad (s<q);$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
(n-1)h &= \left(kr + s \times \frac{r}{q}\right)a,\\
(n-2)h &= \left(kr + (s-1)\frac{r}{q}\right)a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(n-(s+1))h &= \left(kr + 0 \times \frac{r}{q}\right)a,\\
(n-(s+2))h &= \left((k-1)r + (q-1)\frac{r}{q}\right)a,\\
(n-(s+3))h &= \left((k-1)r + (q-2)\frac{r}{q}\right)a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+\ldots+f(x+(n-1)h)\}\\
&\quad= \frac{k}{n}\left\{f(x)+f\left(x+\frac{ra}{q}\right)+\ldots+f\left(x+(q-1)\frac{ra}{q}\right)\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{n}\left\{f(x)+f\left(x+\frac{ra}{q}\right)+\ldots+f\left(x+s\frac{ra}{q}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $s<q$, lorsque n augmente indéfiniment la deuxième des sommes figurant au second membre tend uniformément vers o. Quant à la première, remarquons que $\frac{k}{n}=\frac{k}{kq+s}$ a pour limite $\frac{1}{q}$, de sorte que finalement le premier membre tend uniformément vers la quantité

$$[f(x), h]=\frac{1}{q}\left\{f(x)+f\left(x+\frac{ra}{q}\right)+\ldots+f\left(x+(q-1)\frac{ra}{q}\right)\right\}.$$

On peut d'ailleurs la mettre sous une autre forme. Les entiers r et q étant

premiers entre eux, si l'on effectue la division par q des nombres

$$r, \quad 2r, \quad 3r, \quad \ldots, \quad (q-1)r,$$

les restes sont dans un certain ordre les nombres

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (q-1);$$

de sorte que l'on peut écrire encore

$$(f(x), h) = \frac{1}{q}\left\{f(x) + f\left(x + \frac{a}{q}\right) + \ldots + f\left(x + (q-1)\frac{a}{q}\right)\right\}.$$

On voit que la limite $(f(x), h)$ dépend seulement du dénominateur q figurant dans l'expression de h en fonction rationnelle de la période a, $\left(h = \frac{ra}{q}\right)$. Elle admet la période $\frac{a}{q}$ par rapport à x.

Il est intéressant de voir ce que devient $(f(x), h)$ lorsque l'entier q augmente indéfiniment. Si la fonction $f(x)$ est intégrable, on retombe précisément sur la définition de l'intégrale, de sorte que l'on a

$$\lim_{q=\infty}\left[f(x), \frac{ra}{q}\right] = \frac{1}{a}\int_x^{x+a} f(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{a}\int_0^a f(\alpha)\,d\alpha = A_0;$$

cette limite ne dépend ni de x ni de h, et cela fait pressentir déjà que lorsque h est incommensurable avec la période a, l'expression

$$\frac{1}{n}\{f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x + (n-1)h)\}$$

a invariablement pour limite la constante A_0, mais ce n'en est pas une démonstration.

Si $f(x)$ est développée en série de la forme

$$f(x) = A_0 + \sum U_k(x),$$

U_k étant une somme finie de termes de la forme

$$A\cos 2\pi n\frac{x}{a} + B\sin 2\pi n\frac{x}{a},$$

en prenant dans U_k tous les termes pour lesquels n est divisible par l'entier fixe q, et désignant par u_k leur somme, la série $\sum u_k$ est convergente; sa somme n'est autre que

$$\frac{1}{q}\left\{f(x)+f\left(x+\frac{a}{q}\right)+\ldots+f\left(x+(q-1)\frac{a}{q}\right)\right\}=\left[f(x),\frac{a}{q}\right].$$

En particulier si $f(x)$ est développable en série de Fourier

$$f(x)=A_0+\sum A_n\cos 2\pi n\frac{x}{a}+B_n\sin 2\pi n\frac{x}{a},$$

on a

$$\left[f(x),\frac{a}{q}\right]=A_0+\sum A_{mq}\cos 2\pi mq\frac{x}{a}+B_{mq}\sin 2\pi mq\frac{x}{a}.$$

Les fonctions de x, $\left[f(x),\frac{ra}{q}\right]$ se rapprochent d'autant plus de la constante A_0 que q est plus grand, c'est-à-dire en somme que le rapport de h à a est moins simple; leur oscillation tend vers o quand q augmente indéfiniment. En effet partageons l'intervalle x, $x+a$ en q intervalles partiels égaux, et, dans l'intervalle de rang i, désignons par m_i le minimum absolu de $f(x)$, par M_i son maximum absolu; on a, d'après la définition même de l'intégrale,

$$\frac{a}{q}\sum m_i\leqq\int_x^{x+a}f(\alpha)\,d\alpha\leqq\frac{a}{q}\sum M_i$$

et aussi

$$\frac{a}{q}\sum m_i\leqq a\left[f(x),\frac{a}{q}\right]\leqq\frac{a}{q}\sum M_i;$$

par suite

$$\left|\left[f(x),\frac{a}{q}\right]-A_0\right|<\frac{1}{q}\sum(M_i-m_i);$$

de sorte que si l'on désigne par ε_q le maximum de $\left|f\left(x+\frac{a}{q}\right)-f(x)\right|$ lorsqu'on fait varier x on a

$$\left|\left[f(x),\frac{a}{q}\right]-A_0\right|<\varepsilon_q.$$

Nous avons ainsi une limite supérieure de l'oscillation de la fonction $\left[f(x),\frac{a}{q}\right]$.

Il est bien évident que, q augmentant indéfiniment et $f(x)$ étant continue, ε_q a pour limite 0.

Abordons maintenant le cas général en démontrant tout d'abord le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction qui se met sous la forme d'une série uniformément convergente*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_p(x) + \ldots, \tag{1}$$

dans laquelle chacune des expressions $[\varphi_p(x), h]$ est supposée avoir un sens.

1° *La série*

$$[\varphi_1(x), h] + [\varphi_2(x), h] + \ldots + [\varphi_p(x), h] + \ldots \tag{2}$$

est uniformément convergente par rapport à l'ensemble des variables x et h.

2° *La quantité*

$$\frac{1}{n}\{f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x+(n-1)h)\}$$

a toujours une limite, pour $n = \infty$, qui est la somme de la série (2); cette limite est atteinte uniformément par rapport à x, si l'on suppose que, dans le terme général $\varphi_p(x)$ de la série (1), la quantité

$$\frac{1}{n}\{\varphi_p(x) + \varphi_p(x+h) + \ldots + \varphi_p(x+(n-1)h)\}$$

tend, par rapport à x, uniformément vers $[\varphi_p(x), h]$.

Posons

$$f_p(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_p(x),$$
$$\Phi_p(x, h) = [\varphi_1(x), h] + [\varphi_2(x), h] + \ldots + [\varphi_p(x), h].$$

La série (1) étant uniformément convergente pour l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x, on peut, étant donné ε, trouver un entier ν, tel

que, p, p' désignant deux entiers quelconques supérieurs à ν, on ait

$$|f_{p'}(x) - f_p(x)| < \varepsilon,$$

et cela *quel que soit* x. Par conséquent, on aura, *quels que soient* x, h *et l'entier* n,

$$\frac{1}{n}\Big|[f_{p'}(x) - f_p(x)] + [f_{p'}(x+h) - f_p(x+h)] + \ldots$$
$$+ [f_{p'}(x+(n-1)h) - f_p(x+(n-1)h)]\Big| \leqq \varepsilon;$$

ce qui peut s'écrire

$$\Big|\frac{1}{n}\{f_{p'}(x) + f_{p'}(x+h) + \ldots + f_{p'}(x+(n-1)h)\}$$
$$- \frac{1}{n}\{f_p(x) + f_p(x+h) + \ldots + f_p(x+(n-1)h)\}\Big| < \varepsilon.$$

Le premier membre de cette inégalité se compose de deux expressions qui, lorsque n augmente indéfiniment, ont chacune une limite; ces limites satisfont nécessairement à cette même inégalité, c'est-à-dire, par conséquent,

$$(3) \qquad |\Phi_{p'}(x, h) - \Phi_p(x, h)| \leqq \varepsilon,$$

sous les seules conditions $p' > \nu$, $p > \nu$, et, d'ailleurs, quels que soient x et h. Cela établit d'abord la convergence de la série (2), dont nous désignerons la somme par $\Phi(x, h)$.

En faisant augmenter p' dans l'inégalité (3), on en conclut, *quels que soient* x et h,

$$(4) \qquad |\Phi(x, h) - \Phi_p(x, h)| \leqq \varepsilon,$$

ce qui démontre ensuite la convergence uniforme de la série (2) relativement à l'ensemble des variables x et h.

Il convient de remarquer que cette propriété n'entraîne point la continuité de la fonction $\Phi(x, h)$, puisque nous n'avons rien supposé sur la continuité des fonctions $\{\varphi_p(x), h\}$.

Ceci posé, soit ε un nombre positif quelconque, aussi petit que l'on veut, mais donné. On peut trouver p assez grand pour que l'on ait simultané-

ment

$$(5) \qquad |f(x) - f_p(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(6) \qquad |\Phi(x, h) - \Phi_p(x, h)| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

et cela quels que soient x et h. Posons

$$R(x) = f(x) - f_p(x).$$

Puisque l'on a, quel que soit x, $|R(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, on aura, *quels que soient x, h et l'entier n,*

$$(7) \qquad \left| \frac{1}{n} \{ R(x) + R(x+h) + \ldots + R(x+(n-1)h) \} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3};$$

ce qui s'écrit

$$(8) \qquad \left| \frac{1}{n} \{ f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x+(n-1)h) \} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n} \{ f_p(x) + f_p(x+h) + \ldots + f_p(x+(n-1)h) \} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or, la quantité

$$(9) \qquad \frac{1}{n} \{ f_p(x) + f_p(x+h) + \ldots + f_p(x+(n-1)h) \}$$

a pour limite $\Phi_p(x, h)$ pour $n = \infty$, c'est-à-dire *que, étant donnés x et h,* on pourra déterminer ν de façon que, si $n \geqq \nu$, on ait

$$(10) \qquad \left| \frac{1}{n} \{ f_p(x) + f_p(x+h) + \ldots + f_p(x+(n-1)h) \} - \Phi_p(x, h) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{3};$$

d'où, par comparaison avec l'inégalité (8),

$$(11) \qquad \left| \frac{1}{n} \{ f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x+(n-1)h) \} - \Phi_p(x, h) \right| \leqq \frac{2\varepsilon}{3}$$

et enfin, en vertu de l'inégalité (6),

$$(12) \qquad \left| \frac{1}{n} \{ f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x+(n-1)h) \} - \Phi(x, h) \right| \leqq \varepsilon;$$

inégalité exprimant que la quantité

$$(13) \qquad \frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h+\ldots+f(x+(n-1)h)\}$$

tend vers $\Phi(x, h)$ lorsque n augmente indéfiniment.

Arrivons à la troisième partie du théorème. Nous faisons maintenant l'hypothèse que, pour tout terme $\varphi_k(x)$ de la série (1), lorsqu'on se donne h, la quantité

$$\frac{1}{n}\{\varphi_k(x)+\varphi_k(x+h)+\ldots+\varphi_k(x+(n-1)h)\}$$

tend, relativement à la variable x, uniformément vers $[\varphi_k(x), h]$. Il en est donc de même relativement à la quantité

$$\frac{1}{n}\{f_p(x)+f_p(x+h)+\ldots+f_p(x+(n-1)h)\},$$

qui tend uniformément vers $\Phi_p(x, h)$ (h étant donné). On peut donc déterminer ν de façon que, si $n \geqq \nu$, l'inégalité (10) soit satisfaite, *quel que soit* x; comme les inégalités (5), (6), (8) ont lieu quels que soient x et h, on en conclut finalement que l'inégalité (12) a lieu, *quel que soit* x (h étant donné), sous la condition $n \geqq \nu$; ce qui établit la proposition.

Enfin, si les fonctions $[\varphi_k(x), h]$ sont continues par rapport à x, la convergence uniforme de la série (2) entraîne cette propriété que la fonction

$$\begin{aligned}[f(x), h] &= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+\ldots+f(x+(n-1)h)\} \\ &= [\varphi_1(x), h]+\ldots+[\varphi_p(x), h]+\ldots\end{aligned}$$

est continue par rapport à la variable x.

Fonctions moyennes tirées d'une même fonction quasi-périodique. — Ce théorème établi, considérons maintenant une fonction quasi-périodique uniformément continue $f(x)$, et soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ une *base* de périodes du corps réduit fondamental. On pourra toujours développer $f(x)$ en une série simple *uniformément convergente*

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + \sum U_k(x).$$

dans laquelle U_k est une somme finie de termes de la forme

$$(2)\qquad A\cos 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1}+\frac{m_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}\right)+B\sin 2\pi x\left(\frac{m_1}{\alpha_1}+\frac{m_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{m_p}{\alpha_p}\right),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_p$ étant des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls, la combinaison $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = 0$ exclue; les périodes des fonctions trigonométriques figurant dans ce développement étant ainsi les périodes du corps réduit fondamental.

Soit maintenant h un nombre réel quelconque; on a, d'après le théorème précédent,

$$(3)\qquad [f(x), h] = A_0 + \sum [U_k(x), h],$$

et la série du second membre est uniformément convergente d'après le même théorème. On pourra donc effectuer terme à terme l'opération [ ]. Examinons le résultat obtenu. Nous aurons deux cas à distinguer :

1° *h n'appartient pas au corps total défini par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$*, c'est-à-dire que h est incommensurable avec toutes les périodes du corps réduit. Alors toutes les fonctions $[U_k(x), h]$ sont nulles et il reste

$$[f(x), h] = A_0.$$

2° *h appartient au corps des périodes :* l'on pourra écrire

$$\frac{1}{h} = \frac{q}{r}\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}+\frac{\mu_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{\mu_p}{\alpha_p}\right),$$

les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ n'ayant aucun diviseur commun et la fraction $\frac{q}{r}$ étant irréductible. Posons

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}+\frac{\mu_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{\mu_p}{\alpha_p},\qquad \frac{1}{a} = q\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}+\frac{\mu_2}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\mu_p}{\alpha_p}\right),$$

d'où

$$h = r\frac{\alpha}{q} = ra.$$

Voyons ce que devient la série

$$A_0 + \sum [U_k(x), h].$$

Dans $U_k(x)$ divisons en deux classes les termes de la forme (2) qui y figurent. D'abord, ceux pour lesquels on n'a pas

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{m_p}{\mu_p};$$

les périodes des fonctions trigonométriques correspondantes sont incommensurables avec h; ces termes disparaissent donc dans $(U_k(x), h)$.

Restent les termes pour lesquels on a

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{m_p}{\mu_p};$$

désignons par u_k leur somme dans le terme U_k $\Big($remarquons déjà que la série $\sum u_k$ est celle dont nous avons établi antérieurement la convergence uniforme, et dont la somme a été désignée par $S_\alpha(x)\Big)$.

Nous diviserons encore ces termes en deux catégories : d'abord ceux pour lesquels on a

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{m_p}{\mu_p} = qs,$$

s étant un entier quelconque. Ces termes restent inaltérés par l'opération (u, h). En effet, un tel terme peut se mettre sous la forme

$$A \cos 2\pi rs \frac{x}{h} + B \sin 2\pi rs \frac{x}{h}.$$

Désignons par u'_k la somme de ces termes dans U_k; ces termes sont tous contenus dans u_k et la série $\sum u'_k$, dont la convergence a été établie, a pour somme la fonction que nous avons appelée $S_a(x)$.

Considérons les autres termes : l'entier p, défini par les relations

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{m_p}{\mu_p} = q',$$

n'est pas divisible par q. Un tel terme s'écrit

$$A \cos 2\pi q' \frac{x}{\alpha} + B \sin 2\pi q' \frac{x}{\alpha};$$

c'est une fonction de période $\frac{\alpha}{q'} = \omega$, et l'on a

$$h = r\frac{q'}{q}\omega;$$

q ne divise pas le produit rq', puisqu'il est premier avec r. On a donc (p. 210)

$$\left[\cos 2\pi\frac{x}{\omega}, h\right] = \frac{1}{q}\left\{\cos 2\pi\frac{x}{\omega} + \cos 2\pi\left(\frac{x}{\omega} + \frac{1}{q}\right) + \ldots + \cos 2\pi\left(\frac{x}{\omega} + \frac{q-1}{q}\right)\right\} = 0$$

et une formule analogue pour $\sin 2\pi\frac{x}{\omega}$.

L'opération (u, h) fait encore disparaître ces termes, et il reste finalement ceux pour lesquels on a

$$m_1 = s(q\mu_1), \qquad m_2 = s(q\mu_2), \qquad \ldots, \qquad m_p = s(q\mu_p);$$

s pouvant prendre toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, 0 excepté.

Il vient, en définitive,

$$(f(x), h) = A_0 + \sum u'_k = A_0 + S_a(x),$$

et la fonction $S_a(x)$ *admet la période* $a = \frac{h}{r}$, *et, par suite,* h.

On a d'ailleurs les relations

$$(4) \qquad S_a(x) = (S_\alpha(x), h)$$
$$= \left[S_\alpha(x), \frac{\alpha}{q}\right] = \frac{1}{q}\left\{S_\alpha(x) + S_\alpha\left(x + \frac{\alpha}{q}\right) + \ldots + S_\alpha\left(x + (q-1)\frac{\alpha}{q}\right)\right\}.$$

Nous retrouvons ici, par une voie totalement différente, les fonctions $S_\alpha(x)$; *nous obtenons de plus une démonstration nouvelle de la convergence des séries* $\sum u'_k$.

Nous pouvons résumer ainsi qu'il suit les résultats obtenus :

$f(x)$ *étant une fonction quasi-périodique uniformément continue, la*

quantité

$$(5)\qquad \frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+\ldots+f(x+(n-1)h)\}$$

a toujours une limite pour n infini.

1° *Si h n'appartient pas au corps des périodes attaché à $f(x)$, cette limite est invariablement une constante A_0, indépendante de x et de h, qui a pour valeur*

$$A_0 = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

2° *Si h appartient au corps des périodes, il existe une période primitive α du corps réduit fondamental, et une seule, qui est commensurable avec h $\left(h = \frac{r\alpha}{q}\right)$; en désignant par $S_\alpha(x)$ la fonction S correspondante, l'expression (5) a pour limite*

$$[f(x), h] = A_0 + [S_\alpha(x), h] = A_0 + \left[S_\alpha(x), \frac{\alpha}{q}\right].$$

La limite, lorsque h est donné, est toujours atteinte uniformément par rapport à x; c'est de plus une fonction continue de x, de période h.

Il est clair que les mêmes propriétés s'appliquent à plus forte raison aux fonctions périodiques continues.

On peut dire encore qu'au point de vue de l'opération $[f(x), h]$, tout se passe comme si la fonction $f(x)$ était toujours développable suivant la série $A_0 + \frac{1}{2}\sum S_\alpha(x)$ (¹), sur laquelle on effectuerait terme à terme l'opération indiquée.

On voit en particulier que, si a est une période quelconque du corps réduit fondamental, et si $\alpha = aq$ est la période primitive correspondante, on a d'abord

$$S_a(x) = [S_\alpha(x), a]$$

et, par suite,

$$S_a(x) = [f(x), a] - A_0.$$

(¹) Dans ce développement, qui contient les deux fonctions $S_\alpha(x)$ et $S_{-\alpha}(x)$, la même fonction $S_\alpha(x)$ intervient en réalité deux fois puisque $S_\alpha(x) = S_{-\alpha}(x)$.

Ainsi se trouve établie cette proposition que nous avions énoncée (p. 204), à savoir que la définition des fonctions $S_a(x)$ est indépendante de la base choisie dans le corps réduit.

Les propriétés du symbole $[f(x), h]$ permettent aussi, lorsque le corps des périodes est inconnu, de reconnaître dans certains cas qu'un nombre donné h appartient à ce corps; en effet, si l'on trouve que la limite $[f(x), h]$ n'est pas une constante, on est assuré que h appartient au corps des périodes.

Citons encore quelques propriétés du symbole $[f(x), h]$. Si l'on effectue sur $[f(x), h]$ une opération analogue, c'est-à-dire $[[f(x), h], h']$, il existe un nombre h'' tel que

$$[[f(x), h], h'] = [f(x), h''];$$

d'ailleurs, on a

$$[[f(x), h], h'] = [[f(x), h'], h]$$

et

$$\left[\left[f(x), \frac{a}{q}\right], \frac{a}{q'}\right] = \left[f(x), \frac{a}{qq'}\right].$$

Enfin, si l'on considère la suite des nombres $\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \ldots, \frac{a}{q}, \ldots$, et si la fonction de x, $\left[f(x), \frac{a}{q}\right]$, devient constante à partir de $q \geqq m$, la fonction $S_a(x)$ est un polynome entier de degré m en $\cos 2\pi \frac{x}{a}$, $\sin 2\pi \frac{x}{a}$. Toutes ces propositions s'obtiennent avec la plus grande facilité.

Application aux développements en séries de fonctions périodiques. — Nous avons vu que si la série multiple

$$A_0 + \tfrac{1}{2} \sum S_{\mu_1, \ldots, \mu_p}(x) \qquad (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \text{ premiers entre eux})$$

est uniformément convergente, elle représente $f(x)$. En rassemblant deux à deux les termes qui correspondent aux systèmes d'entiers $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$, $(-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_p)$, on a ainsi un développement en série de $f(x)$ dans lequel les termes sont des fonctions simplement périodiques à périodes deux à deux incommensurables. Il est facile de montrer maintenant que, abstraction faite de l'ordre des termes, ces développements sont uniques.

Plus généralement, considérons le développement uniformément convergent

$$(1) \qquad f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_k(x) + \ldots,$$

dans lequel chaque terme est la somme d'un nombre fini de fonctions périodiques non constantes; nous supposons de plus que *les périodes figurant dans l'ensemble de ce développement sont deux à deux incommensurables.*

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ une base du corps réduit fondamental attaché à $f(x)$ et α une période primitive quelconque

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} + \frac{\mu_2}{\alpha_1} + \ldots + \frac{\mu_p}{\alpha_p} \qquad (\mu_1, \ldots, \mu_p \text{ premiers entre eux});$$

pour simplifier l'écriture nous poserons, comme toujours,

$$S_\alpha(x) = S_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p}(x).$$

Je dis d'abord que toutes les périodes figurant dans le développement (1) appartiennent au corps des périodes attaché à $f(x)$. En effet, soit a la période d'une fonction $\psi(x)$ qui figure dans le terme $\varphi_k(x)$; en appliquant le théorème précédent, nous obtenons immédiatement

$$[f(x), a] = \psi(x) + \text{const.}$$

Ceci montre que a appartient au corps des périodes, puisque $\psi(x)$ n'est pas constante; la période a est donc commensurable avec quelqu'une des périodes primitives, et avec une seule α; en appelant h un multiple commun à α et à a, on a

$$[f(x), h] = A_0 + S_\alpha(x) = \psi(x) + \text{const.};$$

la fonction $\psi(x)$ ne diffère de $S_\alpha(x)$ que par une constante.

A toute fonction $\psi(x)$ du développement (1) correspond une période primitive α, et les fonctions $\psi(x)$, $S_\alpha(x)$ ne diffèrent que par une constante.

Inversement, soit α une période primitive quelconque; on a

$$[f(x), \alpha] = A_0 + S_\alpha(x) = [\varphi_1(x), \alpha] + [\varphi_2(x), \alpha] + \ldots + [\varphi_k(x), \alpha] + \ldots.$$

De deux choses l'une : ou bien il y a dans (1) une période commensurable

avec α, et alors la fonction périodique correspondante ne diffère de $S_\alpha(x)$ que par une constante, ou bien il n'y a pas dans (1) de période commensurable avec α; alors la somme

$$[\varphi_1(x), \alpha] + \ldots + [\varphi_k(x), \alpha] + \ldots$$

est nécessairement constante, et, par suite, $S_\alpha(x)$ identiquement nul. De sorte qu'on peut dire finalement :

A toute période primitive α du corps réduit fondamental correspond dans le développement (1) *une fonction $\psi_\alpha(x)$ de période α, qui ne diffère de $S_\alpha(x)$ que par une constante*, et inversement.

Si l'on assujettit enfin les fonctions $\psi_\alpha(x)$, qui composent les divers termes du développement, à avoir une moyenne nulle, c'est-à-dire

$$\int_0^\alpha \psi_\alpha(x)\,dx = 0,$$

on a alors exactement

$$\psi_\alpha(x) = S_\alpha(x).$$

On voit bien maintenant que *si une fonction quasi-périodique, uniformément continue, est développable en série dont les termes sont des fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables, ce développement est unique* [1], *aux constantes près que l'on peut ajouter à chaque terme;* les périodes qui y figurent sont les périodes primitives du corps réduit, et les fonctions correspondantes les fonctions $S_\alpha(x)$, dont on constate une fois de plus l'importance.

Dans toutes ces propositions la convergence uniforme est une condition essentielle. Nous avons montré, en effet (p. 126), qu'une fonction continue quelconque peut être représentée par une série dont les termes sont des fonctions périodiques, et les périodes une suite de nombres croissants, grandissant indéfiniment et arbitrairement donnés; mais la convergence n'est plus uniforme.

---

[1] On fait abstraction de l'ordre que peuvent occuper les termes dans le développement considéré.

Représentation approchée des fonctions quasi-périodiques, par une somme finie de fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables. — La fonction quasi-périodique $f(x)$ pouvant toujours être représentée, avec l'approximation ε, par une somme finie de sinus et de cosinus dont les périodes appartiennent au corps réduit fondamental, il en résulte immédiatement que l'on peut représenter $f(x)$, avec une approximation donnée ε, par une somme finie de fonctions périodiques dont les périodes sont des périodes primitives du corps réduit, et, par suite, *deux à deux incommensurables.*

Il y a toutefois une remarque à faire : c'est qu'on pourrait représenter $f(x)$ avec l'approximation ε, par une somme finie de fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables sans que toutes ces périodes appartinssent au corps des périodes de $f(x)$. Mais, dans ce cas, l'oscillation des fonctions périodiques correspondantes serait infiniment petite, inférieure à 4ε, c'est-à-dire qu'elles différeraient d'une constante de moins de 4ε.

En effet, soit

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)$$

une telle somme. On peut toujours supposer, en ajoutant une constante convenable B_0, que les fonctions $\psi(x)$ ont une moyenne nulle, c'est-à-dire que

$$\int_0^{b_i} \psi_i(x)\,dx = 0.$$

Par hypothèse on a donc, quel que soit x,

$$|f(x) - [B_0 + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x)]| < \varepsilon.$$

D'autre part, considérons une représentation de $f(x)$ avec la même approximation ε,

$$A_0 + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_m(x),$$

dans laquelle les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des fonctions périodiques φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ appartiennent au corps réduit, les fonctions φ ayant leurs moyennes nulles; cette représentation est possible. On conclura de là

$$|A_0 - B_0 + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) - \psi_1(x) - \psi_2(x) - \ldots - \psi_n(x)| < 2\varepsilon;$$

et, par suite, quels que soient x et h,

$$|A_0 - B_0 + (\varphi_1(x), h) + \ldots + (\varphi_m(x), h) - (\psi_1(x), h) - \ldots - (\psi_n(x), h)| \leqq 2\varepsilon.$$

Si l'on donne à h une valeur incommensurable avec chacune des périodes $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, il viendra d'abord

$$|A_0 - B_0| \leqq 2\varepsilon.$$

Soit maintenant b_i une période incommensurable avec chacune des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_m$; on aura, en faisant $h = b_i$,

$$|A_0 - B_0 + \psi_i(x)| \leqq 2\varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$|\psi_i(x)| \leqq 4\varepsilon.$$

L'oscillation de la fonction périodique $\psi_i(x)$ est donc nécessairement très petite si ε est lui-même très petit.

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES D'ORDRE INFINI.

L'existence des fonctions moyennes n'est pas absolument particulière aux fonctions quasi-périodiques. Elle exprime une propriété qui, d'après le théorème de la page 212, appartient à toutes les fonctions développables en séries *uniformément convergentes*, dont les termes sont des fonctions quasi-périodiques uniformément continues et définies sur des champs qui peuvent être différents. En faisant la somme des n premiers termes, on obtient une fonction quasi-périodique dont l'ordre pourrait augmenter indéfiniment avec n. Les fonctions limites ainsi définies constituent l'extension la plus naturelle des fonctions quasi-périodiques uniformément continues. Il est clair, puisque ces dernières peuvent être représentées, avec telle approximation que l'on veut, par des sommes finies de sinus et de cosinus dont les arguments sont proportionnels à x, que les fonctions précédentes peuvent toujours être développées en séries uniformément convergentes

$$(1) \qquad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_k(x) + \ldots,$$

dans lesquelles le terme général $\varphi_k(x)$ est une somme de sinus et cosinus dont les arguments sont proportionnels à x.

On peut enfin obtenir pour ces fonctions des développements (1) où le terme général φ_k est une somme de fonctions périodiques, les périodes figurant dans l'ensemble du développement étant deux à deux incommensurables, et dans ce cas ce développement est unique quant à la nature des fonctions périodiques qui y figurent.

La propriété exprimée par l'existence de la limite des moyennes s'applique probablement à des fonctions qui n'appartiennent pas à cet ensemble de fonctions. En effet, d'après le théorème de la page 212, si l'on désigne par E l'ensemble des fonctions $f(x)$, pour lesquelles $[f(x), h]$ a un sens, toute fonction qui se met sous la forme d'une série uniformément convergente dont les termes appartiennent à l'ensemble E appartient elle-même à E, mais rien ne prouve que E se compose de l'ensemble des fonctions quasi-périodiques d'ordre fini ou infini. C'est là une question que je ne me suis pas proposé d'étudier ici.

SOMMES FINIES DE FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Je montrerai, pour terminer cette Partie, comment l'application des moyennes permet d'étudier certaines propriétés des fonctions qui se mettent sous la forme d'une somme finie de fonctions périodiques.

Soit $f(x)$ une fonction de cette nature

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x).$$

On peut toujours supposer que les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, des fonctions périodiques non *constantes* $\varphi(x)$, sont *deux à deux incommensurables*, sans quoi on réunirait dans un même terme toutes les fonctions dont les périodes sont commensurables, en choisissant comme période commune un multiple commun de ces périodes.

On a, quel que soit h,

$$(1) \qquad [f(x), h] = [\varphi_1(x), h] + [\varphi_2(x), h] + \ldots + [\varphi_n(x), h].$$

Posons d'une façon générale

$$\mathbf{M}_i = \frac{1}{a_i}\int_0^{a_i} \varphi_i(x)\,dx.$$

Si l'on fait, par exemple,

$$h = a_1,$$

on obtient

$$(2) \qquad [f(x), a_1] = \varphi_1(x) + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \ldots + \mathbf{M}_n.$$

En posant

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n,$$

on pourra donc écrire

$$(3) \qquad f(x) = [f(x), a_1] + [f(x), a_2] + \ldots + [f(x), a_n] - (n-1)\mathbf{M}.$$

Ceci fournit donc un moyen, connaissant les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, d'obtenir, à des constantes près, chacune des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Nous savons d'ailleurs, puisque $f(x)$ est une fonction quasi-périodique uniformément continue, que, si elle se met sous la forme d'une somme de fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables, elle ne peut s'y mettre que d'une manière, aux constantes près (p. 222).

Enfin, l'ordre de la fonction $f(x)$ est exactement égal à l'ordre q du corps déterminé par les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

En effet, soit p l'ordre inconnu de la fonction $f(x)$. Tout d'abord il est clair que p est au plus égal à q. D'autre part, il ne peut lui être inférieur. En effet, la relation (2) montre que a_1 appartient au corps des périodes attaché à $f(x)$, puisque $\varphi_1(x)$ n'est pas constante; de même pour $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ appartenant ainsi à un même corps d'ordre p, il y en a au plus p d'indépendantes; donc $q \leq p$, de sorte que finalement $p = q$.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

Dans cette quatrième Partie, je me propose, non pas d'étudier systématiquement les applications dont les fonctions quasi-périodiques sont susceptibles, mais seulement de signaler rapidement quelques problèmes où elles peuvent intervenir.

Il semble que la notion de fonctions quasi-périodiques puisse fournir des considérations utiles dans des études de nature assez différente et, pour ainsi dire, chaque fois que dans une même formule, ou dans un même problème, se trouvent réunis des éléments périodiques de périodes égales ou différentes. Aussi doit-on s'attendre à rencontrer la plupart des applications dans des problèmes d'Astronomie, de Mécanique ou de Physique mathématique. L'importance des fonctions quasi-périodiques s'y manifeste généralement par la nature de leurs développements en série qui possèdent la propriété de converger uniformément dans un domaine infini.

Ainsi, pour citer un exemple d'une extrême simplicité, soient M_1, M_2, ..., M_n, n corps attirés suivant la loi de Newton par un corps fixe M, dont la masse est infiniment grande par rapport à celle de chacun des corps M_1, M_2, ..., M_n. Si ces derniers sont suffisamment petits, et restent assez éloignés les uns des autres pour que leurs attractions mutuelles puissent être négligées, toute fonction liée à la position relative des points M_1, M_2, ..., M_n est une fonction quasi-périodique. Telle serait par exemple la distance de deux des corps du système.

Il n'est nullement invraisemblable que la notion de quasi-périodicité puisse jouer un rôle dans le problème des n corps. Il semble même qu'il en soit réellement ainsi, si l'on se reporte à un Mémoire de M. H. Poincaré [1],

[1] H. Poincaré, *Sur l'intégration des équations du problème des trois corps* (*Bulletin astronomique*, t. XIV, 1897, p. 241-271).

où, en ce qui concerne le problème des trois corps, les coordonnées des astres sont mises sous la forme de séries, dont les termes sont des fonctions périodiques du temps.

En Mécanique on retrouve les fonctions quasi-périodiques dans certains problèmes, où l'on étudie le mouvement d'un système autour d'une position d'équilibre stable, et lorsqu'on dépasse la première approximation.

Enfin l'étude de la composition des mouvements vibratoires fournit aussi des applications intéressantes des fonctions quasi-périodiques.

Pour citer encore un exemple très simple, considérons dans un milieu élastique (un gaz par exemple) deux sources d'ébranlements périodiques A et B, de périodes a et b. En un point M distinct de A et B, comment varie la pression en fonction du temps ou l'élongation relative au mouvement d'une même molécule? Si les ébranlements en A et B sont infiniment petits, la pression P au point M est la somme de deux fonctions périodiques de périodes a et b. Mais, si ces ébranlements ne sont plus infiniment petits, ou bien si l'on veut tenir compte des variations du second ordre, la pression P est une fonction quasi-périodique uniformément continue attachée au champ des périodes a et b; de sorte qu'outre des fonctions de périodes a et b interviennent, dans l'expression de P, des fonctions périodiques dont les périodes appartiennent au corps réduit défini par les périodes fondamentales a et b.

D'ailleurs M. Bohl, dans un Ouvrage publié en russe [1], a fait une application précise et intéressante des fonctions quasi-périodiques à propos de la théorie de Helmholtz sur la composition des sons.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Sans entreprendre ici une étude approfondie de l'application des fonctions quasi-périodiques aux équations différentielles, je voudrais cependant indiquer quelques formes générales d'équations où peuvent intervenir des intégrales quasi-périodiques, me proposant d'ailleurs de revenir sur ce sujet.

---

[1] P. Bohl, *Sur certaines équations différentielles d'un caractère général que l'on rencontre en Mécanique*. Dorpat, 1900.

La recherche des caractères fonctionnels des intégrales d'une équation différentielle est généralement un problème difficile. Les équations différentielles expriment en effet des propriétés qui lient les points infiniment voisins d'une intégrale, alors que les caractères fonctionnels expriment des propriétés entre des points à distance finie. Aussi le plus souvent ne découvre-t-on ces caractères qu'après avoir effectué l'intégration.

La périodicité simple est déjà une propriété qu'il n'est pas facile de mettre en évidence, et il n'y a pas de règle générale permettant d'obtenir les intégrales périodiques d'une équation différentielle quelconque. La quasi-périodicité n'étant qu'une extension de la périodicité, on voit que le problème doit être nécessairement plus compliqué encore.

Il y a toujours, dans ces sortes de questions, deux cas à distinguer suivant que l'on recherche des propriétés appartenant à l'intégrale générale ou seulement à une ou plusieurs intégrales particulières.

Ainsi, soit l'équation

$$y' = \theta(y, x).$$

Si l'intégrale générale est une fonction périodique de période a, la fonction $\theta(x, y)$ est, quel que soit y, une fonction périodique de x de période a.

En effet, on a nécessairement pour toute intégrale

$$y' = \theta(y, x + a)$$

et, par suite,

$$\theta(y, x + a) - \theta(y, x) = 0,$$

relation qui doit avoir lieu identiquement, sinon l'intégrale y ne pourrait dépendre d'une constante arbitraire. La condition n'est pas suffisante, mais elle est nécessaire.

Au contraire la même équation différentielle pourrait fort bien admettre une intégrale périodique de période a sans que $\theta(y, x)$ fût, par rapport à x, une fonction périodique de période a.

Le même raisonnement s'applique d'ailleurs à l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Phi\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}, \ldots, y, x\right).$$

Si l'intégrale générale est une fonction périodique de période fixe a, le

second membre est nécessairement une fonction périodique de x, de période a.

Vis-à-vis des équations différentielles qui admettent comme intégrales générales des fonctions quasi-périodiques uniformément continues attachées à un même champ de périodes, il existe des conditions analogues.

Soit

$$\frac{dy}{dx} = \theta(y, x)$$

une équation différentielle, admettant des intégrales continues uniformes, quasi-périodiques, attachées au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (que l'on peut toujours supposer indépendantes) et possédant des dérivées quasi-périodiques. Soient y une de ces intégrales, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ un système de valeurs quelconques attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si

$$x + m_1 a_1 - x_1, \quad x + m_2 a_2 - x_2, \quad \ldots, \quad x + m_p a_p - x_p$$

sont infiniment petits, il est clair que

$$\theta[y(x), x]$$

est infiniment voisin de $y'(x)$. D'autre part on a, en désignant par $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ l'associée de y,

$$y'(x) = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_p};$$

par conséquent la fonction de x

$$\theta[F(x_1, \ldots, x_p), x]$$

a une limite lorsque $x + m_1 a_1 - x_1$, $x + m_2 a_2 - x_2$, $\ldots$, $x + m_p a_p - x_p$ deviennent infiniment petits. Il peut se présenter deux cas :

1° $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant donnés, la limite existe quel que soit F, c'est-à-dire quel que soit y; la fonction $\theta(y, x)$ est alors, quel que soit y, une fonction quasi-périodique attachée au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Si l'on désigne par $\Theta(y, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ son associée sur ce champ, le problème revient à chercher les solutions périodiques de l'équation aux déri-

vées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_p} = \Theta(F, x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

2° $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant donnés, il leur correspond une ou plusieurs valeurs de y, pour lesquelles $\theta(y, x)$ a une limite dans les conditions indiquées; ces valeurs de y sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et il reste à s'assurer que lorsqu'on y fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = x$ elles satisfont à l'équation différentielle donnée.

Si l'intégrale générale est une fonction quasi-périodique attachée au champ $a_1, a_2, \ldots, a_p$, la fonction $\theta(y, x)$ doit être, quel que soit y, une fonction quasi-périodique de x attachée au même champ, comme cela résulte immédiatement des raisonnements précédents. Cette condition, toujours nécessaire, n'est, bien entendu, nullement suffisante.

La même conclusion s'étend aux équations différentielles d'ordre supérieur. Si l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \Phi\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}, \ldots, y, x\right)$$

admet une intégrale générale quasi-périodique attachée au champ des périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, le second membre est, quels que soient $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}, \ldots, y$, une fonction quasi-périodique attachée au même champ.

Sans que l'intégrale générale soit quasi-périodique, on se trouvera souvent en présence d'équations différentielles mises sous la forme (1), dans laquelle Φ est une fonction quasi-périodique de x. Dans ce cas, si l'on appelle

$$\Psi\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots, y, x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$$

l'associée de Φ sur le champ des périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, la recherche des intégrales quasi-périodiques admettant des dérivées elles-mêmes quasi-périodiques se ramène à la recherche des fonctions $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_p$, de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta^n F = \Psi(\Delta^{n-1} F, \Delta^{n-2} F, \ldots, F, x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

où l'on a posé

$$\Delta^k F = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p}\right)\right)^{(k)} F(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS QUASI-PÉRIODIQUES.

Parmi les équations précédentes (dont le second membre est quasi-périodique en x) étudions d'un peu plus près celles qui sont linéaires et homogènes en $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots, y$.

Soit donc une équation de la forme

$$(1) \qquad R(x)\frac{d^n y}{dx^n} + R_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + R_n(x) y = 0,$$

où $R, R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des *fonctions quasi-périodiques* uniformément continues.

Le problème qui consiste à rechercher les caractères les plus généraux des intégrales d'une telle équation est d'un grand intérêt et d'une réelle importance; mais il comporte aussi de sérieuses difficultés, et se ramène finalement à l'étude d'équations fonctionnelles assez compliquées. Je n'ai pu réussir jusqu'ici à mettre complètement en évidence l'existence des solutions de ces équations fonctionnelles, mais j'ai tenu à montrer la véritable nature des difficultés que l'on rencontre.

Le problème posé peut être considéré comme une généralisation de celui où l'on suppose que les coefficients $R, R_1, \ldots, R_n$ sont des fonctions périodiques uniformes, *de même période*. C'est là un problème bien connu, traité successivement par M. Fuchs (1), par M. Floquet (2), et par M. Picard (3) dans le cas de fonctions doublement périodiques. Mais, tandis que dans ces cas l'*équation fondamentale* est une équation algébrique à coefficients constants, elle devient ici une équation fonctionnelle, et c'est là l'origine des principales difficultés.

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 66.

(2) *Annales de l'École Normale*, t. XII, 1883.

(3) *Journal de Crelle*, t. 90.

Nous pouvons toujours supposer que les coefficients $R, R_1, \ldots, R_n$ sont des fonctions quasi-périodiques attachées au même champ de périodes. En effet, si $A, A_1, \ldots, A_n$ sont les champs sur lesquels sont respectivement définies les fonctions $R, R_1, \ldots, R_n$, leur champ résultant (p. 110) est simultanément attaché aux mêmes fonctions ainsi que tous ses équivalents, parmi lesquels se trouvent des champs de périodes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Désignons par

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

les associées de $R, R_1, \ldots, R_n$ sur le champ unique défini par les *périodes indépendantes* $a_1, a_2, \ldots, a_p$; $Q, Q_1, \ldots, Q_n$ sont des fonctions continues périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de périodes $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Nous poserons, pour simplifier,

$$P_1(x_1, \ldots, x_p) = \frac{Q_1}{Q}, \qquad P_2 = \frac{Q_2}{Q}, \qquad \ldots, \qquad P_n = \frac{Q_n}{Q}.$$

La recherche des intégrales quasi-périodiques de l'équation (1) se ramène à celle des fonctions $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles [1]

$$\Delta^n f + P_1 \Delta^{n-1} f + \ldots + P_{n-1} \Delta f + P_n f = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$\Delta^k f = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p}\right)\right)^{(k)} f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Signalons tout d'abord quelques propriétés générales du symbole Δf. On a

$$\Delta(f\varphi) = \varphi \Delta f + f \Delta \varphi$$

et, d'une façon générale,

$$\Delta^n(f\varphi) = \varphi \Delta^n f + n \Delta\varphi \Delta^{n-1} f + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 \varphi \Delta^{n-2} f + \ldots + f \Delta^n \varphi;$$

le même symbole satisfait aussi à la formule de différentiation des fonctions

---

[1] En supposant les dérivées quasi-périodiques.

de fonctions

$$\Delta[F(\varphi)] = F'(\varphi)\,\Delta\varphi$$

et à la formule des différentiations composées

$$\Delta[F(\varphi, \psi, \ldots)] = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi}\Delta\psi + \ldots.$$

Envisageons maintenant le symbole Δ au point de vue des substitutions linéaires. Soit la substitution linéaire à déterminant non nul

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = \gamma_1^1 x_1 + \gamma_2^1 x_2 + \ldots + \gamma_p^1 x_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p = \gamma_1^p x_1 + \gamma_2^p x_2 + \ldots + \gamma_p^p x_p. \end{cases}$$

Par cette substitution, la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ devient $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ et l'on a

$$\Delta f = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_p \frac{\partial f}{\partial x_p} = B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \ldots + B_p \frac{\partial \varphi}{\partial y_p};$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sont des constantes déterminées par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} B_1 = \gamma_1^1 A_1 + \ldots + \gamma_p^1 A_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_p = \gamma_1^p A_1 + \ldots + \gamma_p^p A_p. \end{cases}$$

Les constantes $B_1, B_2, \ldots, B_p$ se déduisent ainsi de $A_1, A_2, \ldots, A_p$ par la même substitution (3). En posant

$$\Delta_1 \varphi = B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \ldots + B_p \frac{\partial \varphi}{\partial y_p},$$

on peut écrire alors

$$\Delta f = \Delta_1 \varphi$$

et, d'une façon générale,

$$\Delta^k f = \Delta_1^k \varphi.$$

On voit en particulier que si la substitution (3) était choisie de façon que par les formules (4) on ait

$$B_2 = B_3 = \ldots = B_p = 0,$$

il viendrait

$$\Delta^k f = B_1^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial y_1^k}.$$

Dans ce cas l'équation aux dérivées partielles (2) deviendrait une équation ne contenant que les dérivées partielles par rapport à la variable y_1. Supposons, et c'est le cas qui nous occupe, que

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_p = 1,$$

et considérons toutes les substitutions (3) qui donnent par les formules (4)

$$B_2 = B_3 = \ldots = B_p = 0.$$

En résolvant par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on peut écrire une telle substitution

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = B_1 y_1 + \delta_2^1 y_2 + \ldots + \delta_p^1 y_p, \\ x_2 = B_1 y_1 + \delta_2^2 y_2 + \ldots + \delta_p^2 y_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_p = B_1 y_1 + \delta_2^p y_2 + \ldots + \delta_p^p y_p; \end{array} \right.$$

les coefficients δ sont arbitraires à la seule condition que l'on ait

$$\begin{vmatrix} B_1 & \delta_2^1 & \ldots & \delta_p^1 \\ B_1 & \delta_2^2 & \ldots & \delta_p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_1 & \delta_2^p & \ldots & \delta_p^p \end{vmatrix} \neq 0.$$

Par la substitution (5), le symbole

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

devient

$$\Delta_1 \varphi = B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}.$$

Soient maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les coordonnées d'une période dans le système d'axes $O(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; elle se transforme par les formules (5) en une période de coordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. La substitution peut-elle être choisie de façon que

$$\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_p = 0?$$

Cela exigerait que l'on ait

$$\alpha_1 = B_1\beta_1, \qquad \alpha_2 = B_1\beta_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = B_1\beta_1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p.$$

En particulier, si $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une fonction périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont les périodes correspondantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont *indépendantes,* cette fonction n'admet aucune période dont les éléments α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ puissent satisfaire aux conditions précédentes, puisque les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont nécessairement de la forme

$$\alpha_1 = m_1 a_1, \qquad \alpha_2 = m_2 a_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = m_p a_p,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_p$ désignant des nombres rationnels. En d'autres termes, on ne peut trouver aucune période de $P(x_1, \ldots, x_p)$ qui se change par la substitution (5) en une période dirigée suivant l'axe Oy_1.

Mais si l'on se donne arbitrairement $(p-1)$ périodes distinctes, c'est-à-dire telles que dans le Tableau de leurs éléments

$$\begin{matrix} m_1^2 a_1, & m_2^2 a_2, & \ldots, & m_p^2 a_p, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ m_1^p a_1, & m_2^p a_2, & \ldots, & m_p^p a_p, \end{matrix}$$

il y ait au moins un déterminant d'ordre $(p-1)$ différent de 0, on peut trouver une substitution (5) qui transforme ces $(p-1)$ périodes en périodes dirigées respectivement suivant les axes $Oy_2, Oy_3, \ldots, Oy_p$. Cette substitution a la forme suivante :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x_1}{a_1} &= B_1 \frac{y_1}{a_1} + m_1^2 \frac{y_2}{b_2} + \ldots + m_1^p \frac{y_p}{b_p}, \\ \frac{x_2}{a_2} &= B_1 \frac{y_1}{a_2} + m_2^2 \frac{y_2}{b_2} + \ldots + m_2^p \frac{y_p}{b_p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{x_p}{a_p} &= B_1 \frac{y_1}{a_p} + m_p^2 \frac{y_2}{b_2} + \ldots + m_p^p \frac{y_p}{b_p}; \end{aligned} \right.$$

les constantes $B_1, b_2, \ldots, b_p$ sont arbitraires, mais non nulles. Le déterminant

de cette substitution est, à un facteur près,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & m_1^2 & m_1^3 & \dots & m_1^p \\ \frac{1}{a_2} & m_2^2 & \dots & \dots & m_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_p} & m_p^2 & \dots & \dots & m_p^p \end{vmatrix};$$

il est différent de o puisque, par hypothèse, les périodes $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont indépendantes. Il résulte de là que, par une substitution linéaire de la forme (6), on peut transformer l'équation aux dérivées partielles (2) en une équation de la forme

$$(7) \qquad \frac{\partial^n \varphi}{dy_1^n} + M_1(y_1, \dots, y_p)\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial y_1^{n-1}} + M_2\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial y_1^{n-2}} + \dots + M_n\varphi = 0,$$

les fonctions $M_1, M_2, \dots, M_n$ étant périodiques en $y_2, y_3, \dots, y_p$.

Revenons à l'équation (2) sur laquelle on peut étudier directement quelques propriétés relatives à ses intégrales.

Si $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ sont $(n+1)$ intégrales quelconques de cette équation, il est clair que l'on a entre ces fonctions la relation identique

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ \Delta f & \Delta f_1 & \dots & \dots & \Delta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^n f & \Delta^n f_1 & f_2 & \dots & \Delta^n f_n \end{vmatrix} = 0.$$

Si $f_1, f_2, \dots, f_k$ sont k intégrales quelconques, toute fonction de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des fonctions quelconques satisfaisant aux conditions

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \Delta\lambda_2 = 0, \qquad \dots, \qquad \Delta\lambda_k = 0,$$

est aussi une intégrale.

On dira que n intégrales $f_1, f_2, \dots, f_n$ *sont indépendantes* si le

déterminant

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ \Delta f_1 & \Delta f_2 & \dots & \Delta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} f_1 & \Delta^{n-1} f_2 & \dots & \Delta^{n-1} f_n \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. Il est clair qu'entre n intégrales indépendantes ne peut exister aucune relation de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des fonctions vérifiant

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \dots, \qquad \Delta\lambda_n = 0.$$

Au contraire, si n intégrales $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont dépendantes, c'est-à-dire si $D = 0$, il existe entre ces fonctions une relation de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

avec

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \dots, \qquad \Delta\lambda_n = 0.$$

En effet, supposons par exemple

$$D' = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & \dots & f_n \\ \Delta f_2 & \Delta f_3 & \dots & \Delta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-2} f_2 & \dots & \dots & \Delta^{n-2} f_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

et écrivons les équations

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 + \dots + \mu_n f_n, \\ \Delta f_1 &= \mu_2 \Delta f_2 + \dots\dots\dots + \mu_n \Delta f_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta^{n-2} f_1 &= \mu_2 \Delta^{n-2} f_2 + \dots\dots\dots + \mu_n \Delta^{n-2} f_n, \end{aligned}$$

qui déterminent entièrement les coefficients inconnus $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$. Puisque $D = 0$, les coefficients μ ainsi déterminés satisfont en outre à l'équation

$$\Delta^{n-1} f_1 = \mu_2 \Delta^{n-1} f_2 + \dots + \mu_n \Delta^{n-1} f_n.$$

D'autre part, effectuons sur les relations précédentes l'opération définie par le symbole Δ. Il vient

$$\begin{aligned}
&f_2\Delta\mu_2 + f_3\Delta\mu_3 + \ldots + f_n\Delta\mu_n = 0,\\
&\Delta f_2\Delta\mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta f_n\Delta\mu_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Delta^{n-2}f_2\Delta\mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^{n-2}f_n\Delta\mu_n = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque le déterminant D′ est différent de zéro,

$$\Delta\mu_2 = 0, \qquad \Delta\mu_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta\mu_n = 0$$

et l'on a, d'autre part,

$$f_1 = \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 + \ldots + \mu_n f_n.$$

Il résulte de là que si l'on connaît n intégrales indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de l'équation (2), on les aura toutes en posant

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ assujetties aux seules conditions

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta\lambda_n = 0.$$

Ces résultats pourraient être obtenus au moyen de l'équation (7) : en effet, en désignant par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n intégrales indépendantes de cette équation, l'intégrale générale se met sous la forme

$$\varphi = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_n\varphi_n,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des fonctions quelconques des seules variables $y_2, y_3, \ldots, y_p$; résultat qui, en tenant compte de la substitution linéaire, coïncide avec le précédent.

Voici, maintenant, l'hypothèse que je ferai sur l'équation (2) : je supposerai qu'*elle admet n intégrales indépendantes uniformes $f_1, f_2, \ldots, f_n$*. Toutes les intégrales uniformes de la même équation sont alors données par la formule

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des fonctions *uniformes* quelconques, vérifiant les

équations

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \Delta\lambda_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta\lambda_n = 0.$$

On remarquera que si dans λ_i on fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = x$, λ_i devient une constante. Dans les mêmes conditions, toute intégrale de (2) devient une intégrale de (1).

Enfin, si $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une intégrale quelconque de (2), la fonction

$$f(x_1 + m_1 a_1,\ x_2 + m_2 a_2,\ \ldots,\ x_p + m_p a_p)$$

est aussi une intégrale, quels que soient les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Cela résulte immédiatement du fait que les coefficients $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Désormais, je ne considérerai parmi les intégrales de (2) que celles qui sont uniformes.

Théorème. — *L'équation* (2) *admet un système* (*et par suite une infinité*) *d'intégrales indépendantes uniformes, périodiques séparément par rapport à* $(p-1)$ *quelconques des variables;* $x_2, x_3, \ldots, x_p$ *par exemple.*

Cette proposition résulte, comme on va le montrer, du théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales.

Tout d'abord effectuons un changement linéaire de variables, qui transforme le symbole Δf en $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$, et les périodes

$$(0, a_2, 0, \ldots, 0), \quad (0, 0, a_3, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 0, a_p),$$

respectivement en

$$(0, b_2, 0, \ldots, 0), \quad (0, 0, b_3, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 0, b_p);$$

cela est possible (p. 236). L'équation (2) devient alors

$$(7) \qquad \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_1^n} + M_1(y_1, y_2, \ldots, y_p)\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial y_1^{n-1}} + M_2\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial y_1^{n-2}} + \ldots + M_n\varphi = 0,$$

et les coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont ainsi périodiques en $y_2, y_3, \ldots, y_p$.

L'équation (7) est équivalente au système d'équations différentielles

linéaires

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} = u_1, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} = u_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial u_{n-2}}{\partial y_1} = u_{n-1}, \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial y_1} = -(M_1 u_{n-1} + M_2 u_{n-2} + \dots + M_n \varphi). \end{cases}$$

Or, d'après le théorème de Cauchy, on sait qu'étant données les valeurs initiales

$$\varphi^0,\quad u_1^0,\quad u_2^0,\quad \dots,\quad u_{n-1}^0;\quad y_1^0,\quad y_2^0,\quad \dots,\quad y_p^0$$

et n fonctions arbitraires

$$\theta_1(y_2, y_3, \dots, y_p),\quad \theta_2(y_2, y_3, \dots, y_p),\quad \dots,\quad \theta_n(y_2, y_3, \dots, y_p)$$

holomorphes [1] au voisinage de $y_2^0, y_3^0, \dots, y_p^0$, se réduisant pour ces valeurs respectivement à

$$\varphi^0,\quad u_1^0,\quad \dots,\quad u_{n-1}^0,$$

il existe n fonctions

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_p),\quad u_1(y_1, y_2, \dots, y_p),\quad \dots,\quad u_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_p),$$

satisfaisant aux équations (8) et se réduisant pour $y_1 = y_1^0$, respectivement aux fonctions

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \dots,\quad \theta_n.$$

Vis-à-vis de l'équation (7), cela signifie qu'étant données les fonctions $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, *il existe une intégrale et une seule*, $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_p)$, telle que, pour $y_1 = y_1^0$, les fonctions

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_p),\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1},\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2},\quad \dots,\quad \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial y_1^{n-1}}$$

---

[1] Nous faisons implicitement l'hypothèse que les coefficients M sont holomorphes.

se réduisent respectivement à

$$\theta_1(y_2, \ldots, y_p), \quad \theta_2(y_2, \ldots, y_p), \quad \ldots, \quad \theta_n(y_2, \ldots, y_p).$$

Ceci posé, donnons-nous pour $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, n fonctions uniformes périodiques par rapport à chacune des variables $y_2, y_3, \ldots, y_p$, les périodes étant respectivement $b_2, b_3, \ldots, b_p$, et supposons que l'intégrale correspondante φ soit uniforme (nous démontrerons dans un instant qu'il en est bien ainsi); je dis que cette intégrale est périodique en $y_2, y_3, \ldots, y_p$.

En effet, les coefficients M étant périodiques en $y_2, y_3, \ldots, y_p$, la fonction

$$\varphi_1 = \varphi(y_1, y_2 + n_2 b_2, y_3 + n_3 b_3, \ldots, y_p + n_p b_p)$$

est une intégrale quels que soient les entiers $n_2, n_3, \ldots, n_p$. Or, les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ayant été choisies périodiques, on a, pour $y_1 = y_1^0$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) &= \varphi(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_1(y_2, \ldots, y_p),\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_2(y_2, \ldots, y_p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial^{n-1} \varphi_1}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) &= \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_n(y_2, \ldots, y_p);
\end{aligned}$$

par conséquent, toujours en vertu du théorème de Cauchy, les deux intégrales

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p), \quad \varphi(y_1, y_2 + n_2 b_2, \ldots, y_p + n_p b_p)$$

coïncident, ce qui démontre la proposition.

Nous avons supposé que l'intégrale φ correspondant aux fonctions données θ est uniforme; voyons s'il peut en être réellement ainsi.

Par hypothèse, l'équation (2) et, par suite, sa transformée linéaire (7) possèdent n intégrales uniformes indépendantes. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ces intégrales; le déterminant

$$H = \begin{vmatrix}
\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^{n-1} \varphi_1}{\partial y_1^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} \varphi_2}{\partial y_1^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^{n-1} \varphi_n}{\partial y_1^{n-1}}
\end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. On peut supposer qu'il n'est pas davantage identiquement nul si l'on y fait $y_1 = y_1^0$; sinon on changerait de valeur initiale. Toute intégrale uniforme de (7) est de la forme

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_n \varphi_n,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des fonctions uniformes des seules variables $y_2, y_3, \ldots, y_p$. Les fonctions $\theta_1(y_2, \ldots, y_p), \ldots, \theta_n(y_2, \ldots, y_p)$ étant supposées uniformes, déterminons $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ par les équations

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mu_1 \varphi_1(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) + \mu_2 \varphi_2(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) + \ldots + \mu_n \varphi_n(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_1(y_2, y_3, \ldots, y_p), \\
\mu_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) + \mu_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) + \ldots + \mu_n \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_2(y_2, y_3, \ldots, y_p), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mu_1 \dfrac{\partial^{n-1} \varphi_1}{\partial y_1^{n-1}}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n \dfrac{\partial^{n-1} \varphi_n}{\partial y_1^{n-1}}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) = \theta_n(y_2, y_3, \ldots, y_p).
\end{array}\right.$$

Ces équations définissent bien les fonctions uniformes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, puisque le déterminant des coefficients est différent de zéro; l'intégrale correspondante

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_n \varphi_n$$

est donc uniforme. L'intégrale φ ainsi obtenue, et ses dérivées $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial y_1^{n-1}}$ se réduisent bien, d'après les équations (9), respectivement à $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pour $y_1 = y_1^0$; nous avons montré, d'autre part, que φ est périodique en $y_2, y_3, \ldots, y_p$.

On peut donc déterminer des intégrales de l'équation (7) périodiques en $y_2, y_3, \ldots, y_p$. Voyons si l'on peut obtenir des systèmes de n de ces intégrales qui soient indépendantes.

Donnons-nous les n systèmes de fonctions périodiques en $y_2, y_3, \ldots, y_p$

$$\begin{array}{llll}
\theta_1^1(y_2, y_3, \ldots, y_p), & \theta_2^1, & \ldots, & \theta_n^1, \\
\theta_1^2(y_2, y_3, \ldots, y_p), & \ldots & \ldots, & \theta_n^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \\
\theta_1^n(y_2, y_3, \ldots, y_p), & \ldots & \ldots, & \theta_n^n
\end{array}$$

auxquels correspondent les n intégrales

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \mu_1^1\varphi_1 + \mu_2^1\varphi_2 + \ldots + \mu_n^1\varphi_n,\\
\Phi_2 &= \mu_1^2\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^2\varphi_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Phi_n &= \mu_1^n\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n^n\varphi_n.
\end{aligned}$$

Les coefficients μ étant définis par n systèmes d'équations analogues à (9), on vérifie immédiatement que l'on a

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_n \\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial y_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1}\Phi_1}{\partial y_1^{n-1}} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1}\Phi_n}{\partial y_1^{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \ldots & \mu_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^n & \ldots & \ldots & \mu_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1}\varphi_1}{\partial y_1^{n-1}} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1}\varphi_n}{\partial y_1^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \theta_1^1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n^1 & \ldots & \ldots & \theta_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{n-1}\varphi_1}{\partial y_1^{n-1}} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1}\varphi_n}{\partial y_1^{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) & \ldots & \varphi_n(y_1^0, y_2, \ldots, y_p) \\ \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\right)^0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}\right)^0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1}\varphi_1}{\partial y_1^{n-1}}\right)^0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial^{n-1}\varphi_n}{\partial y_1^{n-1}}\right)^0 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} \theta_1^1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n^1 & \ldots & \ldots & \theta_n^n \end{vmatrix} \frac{\mathrm{H}(y_1, y_2, \ldots, y_p)}{\mathrm{H}(y_1^0, y_2, \ldots, y_p)}.$$

Ces relations montrent que les intégrales $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ sont indépendantes,

si l'on a choisi les fonctions θ de façon que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_1^n & \dots & \theta_n^n \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul, ce qui est possible d'une infinité de manières.

Le théorème est complètement démontré en ce qui concerne l'équation (7).

Soit $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ un système de ces n intégrales. Toute intégrale Φ, périodique également en $y_2, y_3, \dots, y_p$, est donnée par une fonction linéaire

$$\Phi = \nu_1 \Phi_1 + \nu_2 \Phi_2 + \dots + \nu_n \Phi_n,$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ sont des fonctions uniformes quelconques de $y_2, y_3, \dots, y_p$, mais périodiques par rapport à ces variables. En effet, considérant la période b_2 par exemple, on devra avoir

$$\begin{aligned} &\Phi(y_1, y_2 + b_2, y_3, \dots, y_p) - \Phi(y_1, y_2, \dots, y_p) \\ &\quad = [\nu_1(y_2 + b_2, y_3, \dots, y_p) - \nu_1]\Phi_1 + \dots + [\nu_n(y_2 + b_2, y_3, \dots, y_p) - \nu_n]\Phi_n = 0; \end{aligned}$$

d'où, puisque les intégrales $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sont indépendantes,

$$\nu_1(y_2 + b_2, y_3, \dots, y_p) = \nu_1(y_2, \dots, y_p), \quad \dots, \quad \nu_n(y_2 + b_2, y_3, \dots, y_p) = \nu_n(y_2, \dots, y_p);$$

on aura des relations analogues relativement aux autres périodes $b_3, \dots, b_p$.

En faisant la substitution inverse de celle qui a fourni l'équation (7), on arrive à cette conclusion que *l'équation* (2)

$$\Delta^n f + P_1(x_1, \dots, x_p)\Delta^{n-1} f + \dots + P_{n-1}\Delta f + P_n f = 0$$

admet des systèmes de n intégrales uniformes et indépendantes, périodiques par rapport à $(p-1)$ quelconques des variables $x_1, x_2, \dots, x_p$. Si $f_1, f_2, \dots, f_n$ désignent les intégrales d'un tel système, périodiques en $x_2, x_3, \dots, x_p$ par exemple, toutes les intégrales périodiques par rapport aux mêmes variables peuvent se mettre sous la forme

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *étant des fonctions quelconques, périodiques en* x_2, $x_3, \ldots, x_p$, *satisfaisant aux conditions*

$$\Delta\lambda_1 = 0, \qquad \Delta\lambda_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta\lambda_n = 0.$$

Ces dernières expriment d'ailleurs que les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dépendent des seules variables

$$u_2 = x_1 - x_2, \qquad u_3 = x_1 - x_3, \qquad \ldots, \qquad u_p = x_1 - x_p$$

et sont périodiques, de périodes $a_2, a_3, \ldots, a_p$, par rapport à ces variables.

Sur un système d'équations fonctionnelles déduites des équations (2) *ou* (7). — La démonstration du théorème précédent, entreprise d'une façon différente, conduit à des systèmes d'équations fonctionnelles, dont il ne serait sans doute pas facile de mettre directement les solutions en évidence. L'existence de ces solutions étant assurée d'autre part, on peut en tirer quelques conclusions intéressantes vis-à-vis de ces équations fonctionnelles, et voir de quelle façon elles se rattachent aux équations aux dérivées partielles de la forme (2) ou (7).

Raisonnons sur l'équation (7) et bornons-nous, pour simplifier, au cas de deux variables. Considérons donc l'équation

$$\frac{\partial_n \varphi}{\partial y^n} + M_1(x, y)\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial y^{n-1}} + \ldots + M_n\varphi = 0, \tag{10}$$

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ étant des coefficients périodiques par rapport à x, et de période a. D'après le théorème précédent, il existe des intégrales périodiques en x.

Soient maintenant $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$, n intégrales quelconques indépendantes de l'équation (10). Les fonctions

$$\varphi_1(x + a, y), \qquad \varphi_2(x + a, y), \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x + a, y)$$

sont aussi des intégrales indépendantes de la même équation.

On peut donc poser

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x+a, y) = \nu_1^1(x)\varphi_1 + \nu_2^1(x)\varphi_2 + \ldots + \nu_n^1(x)\varphi_n, \\ \varphi_2(x+a, y) = \nu_1^2(x)\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \nu_n^2(x)\varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x+a, y) = \nu_1^n(x)\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \nu_n^n(x)\varphi_n, \end{cases}$$

et le déterminant

$$\begin{vmatrix} \nu_1^1 & \ldots & \nu_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^n & \ldots & \nu_n^n \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. Soit

$$\varphi = \mu_1(x)\varphi_1 + \mu_2(x)\varphi_2 + \ldots + \mu_n(x)\varphi_n$$

une intégrale quelconque de (10). On a

$$\begin{aligned} \varphi(x+a, y) = \quad & \mu_1(x+a)[\nu_1^1\varphi_1 + \ldots + \nu_n^1\varphi_n] \\ & + \mu_2(x+a)[\nu_1^2\varphi_1 + \ldots + \nu_n^2\varphi_n] + \ldots + \mu_n(x+a)[\nu_1^n\varphi_1 + \ldots + \nu_n^n\varphi_n]. \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale φ soit périodique en x, il faut donc que

$$(12)\qquad \begin{cases} \mu_1(x+a)\nu_1^1 + \mu_2(x+a)\nu_1^2 + \ldots + \mu_n(x+a)\nu_1^n = \mu_1(x), \\ \mu_1(x+a)\nu_2^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n(x+a)\nu_2^n = \mu_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_1(x+a)\nu_n^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n(x+a)\nu_n^n = \mu_n(x), \end{cases}$$

et ces conditions sont suffisantes. Or ce sont là des équations fonctionnelles par rapport aux fonctions inconnues $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, ..., $\mu_n(x)$. L'existence de leurs solutions nous est assurée par le théorème démontré plus haut. Si l'on sait trouver l'intégrale générale de (10), ou si l'on a déterminé n intégrales indépendantes périodiques en x, on saura, par là même, obtenir toutes les solutions du système (12).

Les équations fonctionnelles de la forme (12) ont, à part les conditions d'existence des solutions, les plus grandes analogies avec les systèmes d'équations différentielles linéaires, et je me borne à énoncer quelques résultats sans doute connus.

Si l'on appelle *solutions indépendantes*, n solutions $(\mu_1^1, \mu_2^1, \ldots, \mu_n^1), \ldots, (\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n)$ pour lesquelles le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \cdots & \mu_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \mu_1^n & \cdot\cdot & \cdots & \mu_n^n \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul, toute solution se met sous la forme

$$\begin{aligned} \mu_1 &= C_1\mu_1^1 + C_2\mu_1^2 + \ldots + C_n\mu_1^n, \\ \mu_2 &= C_1\mu_2^1 + \ldots\ldots\ldots + C_n\mu_2^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_n &= C_1\mu_n^1 + \ldots\ldots\ldots + C_n\mu_n^n, \end{aligned}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des fonctions périodiques quelconques de période a. Inversement tout système de cette forme est une solution. Il en résulte immédiatement que μ_1, par exemple, vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$(13) \qquad A_0\mu_1(x+na) + A_1\mu_1[x+(n-1)a] + \ldots + A_n\mu(x) = 0,$$

dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions uniformes de x.

Il suffit, pour le voir, d'éliminer $C_1, C_2, \ldots, C_n$ entre les équations

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= C_1\mu_1^1 + C_2\mu_1^2 + \ldots + C_n\mu_1^n, \\ \mu_1(x+a) &= C_1\mu_1^1(x+a) + \ldots + C_n\mu_1^n(x+a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_1(x+na) &= C_1\mu_1^1(x+na) + \ldots + C_n\mu_1^n(x+na). \end{aligned}$$

Relativement aux équations de la forme

$$(14) \qquad f(x+na) + A_1(x)f[x+(n-1)a] + \ldots + A_n f(x) = 0,$$

on peut énoncer quelques résultats analogues à ceux que l'on obtient vis-à-vis des équations différentielles linéaires homogènes.

Si $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des solutions, toute fonction de la forme

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 + \ldots + B_k f_k,$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sont des fonctions périodiques quelconques de période a,

est aussi une solution. En posant, d'une façon générale,

$$f^{(p)} = f(x + pa),$$

on dira que *k fonctions sont indépendantes vis-à-vis de la période a, si le déterminant*

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_1^{(1)} & \dots & \dots & f_k^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(k-1)} & \dots & \dots & f_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. D'après cela, $(n+1)$ solutions quelconques de l'équation (14) sont toujours dépendantes.

Si k fonctions sont indépendantes, il est clair qu'il ne peut exister entre elles aucune relation de la forme

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 + \dots + B_k f_k = 0,$$

où $B_1, B_2, \dots, B_k$ sont des fonctions périodiques non nulles à la fois.

Au contraire, si $(k+1)$ fonctions $f, f_1, f_2, \dots, f_k$ sont *dépendantes* vis-à-vis de la période a, il existe nécessairement entre elles une relation de la forme précédente. Pour le voir, il suffit de déterminer $B_1, B_2, \dots, B_k$ par les équations

$$\begin{aligned} f &= B_1 f_1 + B_2 f_2 + \dots + B_k f_k, \\ f^{(1)} &= B_1 f_1^{(1)} + B_2 f_2^{(1)} + \dots + B_k f_k^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f^{(k-1)} &= B_1 f_1^{(k-1)} + \dots\dots\dots\dots + B_k f_k^{(k-1)}; \end{aligned}$$

les coefficients B ainsi définis vérifient alors la relation

$$f^{(k)} = B_1 f_1^{(k)} + \dots + B_k f_k^{(k)}.$$

D'autre part, en remplaçant dans les premières x par $x + a$, et tenan compte de ces relations mêmes, on obtient

$$\begin{aligned} &(B_1^{(1)} - B_1) f_1^{(1)} + \dots + (B_k^{(1)} - B_k) f_k^{(1)} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &(B_1^{(k)} - B_1) f_1^{(k)} + \dots + (B_k^{(k)} - B_k) f_k^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$B_1^{(1)} = B_1, \qquad B_2^{(1)} = B_2, \qquad \ldots, \qquad B_k^{(1)} = B_k;$$

ce qui exprime la périodicité des fonctions $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Il suit de là que, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignent n solutions indépendantes de l'équation (14), toute solution est de la forme

$$f = B_1 f_1 + B_2 f_2 + \ldots + B_n f_n;$$

inversement, toute expression de cette forme est une solution.

Un cas particulier intéressant est celui où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'équation (14) sont eux-mêmes des fonctions périodiques de période a. On peut alors trouver des solutions $F(x)$ pour lesquelles on a

$$F(x+a) = \varepsilon(x) F(x),$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction périodique de période a; ε est dans ce cas racine d'une équation algébrique de degré n à coefficients périodiques, jouant ici le même rôle que l'équation fondamentale dans l'étude des intégrales d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients périodiques.

Le cas le plus simple est celui où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des constantes; l'équation algébrique en ε est alors à coefficients constants. A chaque racine correspondent des solutions $F(x)$ qui se mettent sous la forme $e^{rx}\Phi(x)$, $\Phi(x)$ étant une fonction périodique de période a. Je n'insisterai pas davantage sur les relations évidentes qu'il y a entre ces équations fonctionnelles et les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Recherche des intégrales complètement périodiques de l'équation (2). — Si l'équation (1) de la page 232 admet des intégrales quasi-périodiques, l'équation aux dérivées partielles (2) de la page 233 admet des intégrales périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_p$; mais celle-ci n'admet généralement pas de telles intégrales. Il n'est pas difficile de rechercher les conditions pour qu'il en soit ainsi.

Considérons l'ensemble des intégrales de l'équation (2) périodiques en $x_2, x_3, \ldots, x_p$, et soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ l'une quelconque d'entre elles. Les fonctions $f(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, f(x_1 + na_1, x_2, \ldots, x_p)$ sont aussi

des intégrales; il existe entre ces $(n+1)$ intégrales une relation de la forme

$$A_0 f(x_1 + n a_1, \ldots) + A_1 f[x_1 + (n-1) a_1, \ldots] + \ldots + A_n f = 0$$

dans laquelle on a

$$\Delta A_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta A_n = 0;$$

mais un certain nombre de coefficients A_0, A_1, A_2, ... pourraient être nuls.

Supposons que $A_{n-\nu}$ soit le premier coefficient différent de 0; on pourra écrire en divisant par $A_{n-\nu}$

$$(1) \quad f(x_1 + \nu a_1, \ldots)$$
$$= \mu_0 f(x_1, \ldots) + \mu_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \mu_{\nu-1} f[x_1 + (\nu - 1) a_1, \ldots]$$

avec

$$\Delta\mu_0 = 0, \qquad \Delta\mu_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta\mu_{\nu-1} = 0.$$

Les coefficients μ_0, μ_1, ..., $\mu_{\nu-1}$ sont d'ailleurs périodiques en x_2, x_3, ..., x_p.

L'entier ν pourrait s'appeler l'*ordre de l'intégrale* f; ν est au plus égal à n.

Le problème qui se pose est le suivant :

Dans le cas le plus général existe-t-il des intégrales dont l'ordre soit inférieur à n?

Nous dirons quelques mots de ce problème dans un instant; on peut trouver une condition d'existence d'intégrales complètement périodiques sans résoudre ce problème général.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une intégrale d'ordre n périodique en x_2, x_3, ..., x_p. On a donc

$$(2) \quad f(x_1 + n a_1, \ldots)$$
$$= \mu_0 f(x_1, \ldots) + \mu_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \mu_{n-1} f[x_1 + (n-1) a_1, \ldots];$$

μ_0, μ_1, ..., μ_{n-1} sont des fonctions des seules différences

$$u_2 = x_1 - x_2, \qquad u_3 = x_1 - x_3, \qquad \ldots, \qquad u_p = x_1 - x_p$$

périodiques en u_2, u_3, ..., u_p de périodes a_2, a_3, ..., a_p.

D'autre part, toute intégrale périodique en x_2, x_3, ..., x_p se met sous la

forme

$$(3)\quad F(x_1, \ldots, x_p) = \lambda_0 f + \lambda_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \lambda_{n-1} f[x_1 + (n-1)a_1, \ldots],$$

les λ jouissant des mêmes propriétés que les μ. Remplaçons x_1 par $x_1 + a_1$. Le coefficient $\lambda_i(u_2, u_3, \ldots, u_p)$ devient $\lambda_i(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_p + a_1)$, et pour simplifier nous poserons

$$\lambda'_i = \lambda_i(u_2 + a_1, u_3 + a_1, \ldots, u_p + a_1).$$

Nous obtenons de cette façon

$$\begin{aligned} &F(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_p) \\ &\quad = \lambda'_0 f(x_1 + a_1, \ldots) + \lambda'_1 f(x_1 + 2a_1, \ldots) + \ldots + \lambda'_{n-1} f(x_1 + na_1, \ldots) \end{aligned}$$

et, en remplaçant $f(x_1 + na_1, \ldots)$ par son expression (2),

$$\begin{aligned} F(x_1 + a_1, \ldots) = {} & \mu_0 \lambda'_{n-1} f(x_1, \ldots) + (\lambda'_0 + \mu_1 \lambda'_{n-1}) f(x_1 + a_1, \ldots) \\ & + (\lambda'_1 + \mu_2 \lambda'_{n-1}) f(x_1 + 2a_1, \ldots) + \ldots + (\lambda'_{n-2} + \mu_{n-1} \lambda'_{n-1}) f[x + (n-1)a_1, \ldots]. \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale F soit entièrement périodique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu_0 \lambda'_{n-1} & = \lambda_0, \\ \lambda'_0 + \mu_1 \lambda'_{n-1} & = \lambda_1, \\ \lambda'_1 + \mu_2 \lambda'_{n-1} & = \lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ \lambda'_{n-2} + \mu_{n-1} \lambda'_{n-1} & = \lambda_{n-1}. \end{array} \right.$$

Ce sont là des équations fonctionnelles qui doivent avoir des solutions par rapport aux fonctions inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Éliminons $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ et pour cela posons d'une façon générale

$$\lambda^{(k)}(u_2, u_3, \ldots, u_p) = \lambda(u_2 + ka_1, u_3 + ka_1, \ldots, u_p + ka_1).$$

Si dans la première des équations (4) on remplace $u_2, \ldots, u_p$ par $u_2 + (n-1)a_1, \ldots, u_p + (n-1)a_1$, dans la seconde par $u_2 + (n-2)a_1, \ldots, u_p + (n-2)a_1$, etc., et si l'on ajoute, il vient

$$(5)\quad \mu_0^{(n-1)} \lambda_{n-1}^{(n)} + \mu_1^{(n-2)} \lambda_{n-1}^{(n-1)} + \ldots + \mu_{n-1} \lambda_{n-1}^{(1)} = \lambda_{n-1}.$$

Une condition nécessaire est donc que cette équation admette des solutions en λ_{n-1}, périodiques par rapport aux variables $u_2, u_3, \ldots, u_n$; elle est d'ailleurs suffisante, car, si λ_{n-1} est une telle solution, les équations (4) fournissent alors directement et successivement les autres fonctions inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$.

Il serait intéressant de rechercher les conditions que doivent remplir les coefficients $\mu_0, \mu_1 \ldots, \mu_{n-1}$ pour que l'équation (5) possède effectivement des solutions périodiques, mais c'est là une question qui présente de sérieuses difficultés et dans laquelle je n'entrerai pas ici.

Quelques recherches sur les propriétés générales des intégrales de l'équation (1). — Lorsqu'on se propose, non de rechercher (s'il en existe) les intégrales quasi-périodiques de l'équation (1) de la page 232, mais d'obtenir les propriétés les plus générales des intégrales de la même équation, on se trouve amené à se poser le problème que nous avons énoncé un peu plus haut :

Existe-t-il dans le cas le plus général des intégrales de l'équation

$$(6) \qquad \Delta^n f + P_1(x_1, \ldots, x_p)\Delta^{n-1} f + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_p) f = 0$$

dont l'ordre soit inférieur à n?

Remarquons d'abord que, si une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ périodique en $x_2, x_3, \ldots, x_p$ vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$(7) \qquad f(x_1 + \nu a_1, \ldots) \\ = \mu_0 f(x_1, \ldots) + \mu_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \mu_{\nu-1} f[x_1 + (\nu - 1) a_1, \ldots],$$

dans laquelle $\mu_0, \ldots, \mu_{\nu-1}$ sont fonctions des seules variables

$$u_2 = x_1 - x_2, \qquad u_3 = x_1 - x_3, \qquad u_p = x_1 - x_p$$

et périodiques par rapport à ces variables (de périodes $a_2, a_3, \ldots, a_p$), cette fonction f est intégrale d'une équation de degré ν

$$(8) \qquad \Delta^\nu \varphi + P'_1(x_1, \ldots, x_p)\Delta^{\nu-1}\varphi + \ldots + P'_\nu(x_1, \ldots, x_p)\varphi = 0,$$

dans laquelle $P'_1, \ldots, P'_\nu$ sont également périodiques en $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et,

de plus, si f est intégrale de (6), toutes les intégrales de l'équation (8) appartiennent à (6).

Considérons, en effet, l'équation

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \Delta^\nu\varphi & \Delta^{\nu-1}\varphi & \dots & \Delta\varphi & \varphi \\ \Delta^\nu f & \Delta^{\nu-1}f & \dots & \Delta f & f \\ \Delta^\nu f(x_1+a_1,\dots) & \Delta^{\nu-1}f(x_1+a_1,\dots) & \dots & \Delta f(x_1+a_1,\dots) & f(x_1+a_1,\dots) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \Delta^\nu f[x_1+(\nu-1)a_1,\dots] & \dots\dots & \dots & \dots\dots & f[x_1+(\nu-1)a_1,\dots] \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation admet par rapport à φ les ν intégrales indépendantes

$$f,\quad f(x_1+a_1,\dots),\quad \dots,\quad f[x_1+(\nu-1)a_1,\dots].$$

De plus, si on la met sous la forme (8), les coefficients $P'_1, \dots, P'_\nu$ sont périodiques en $x_1, x_2, \dots, x_p$. Ces coefficients s'obtiennent, en effet, en divisant par l'un d'eux les déterminants d'ordre ν que l'on peut former avec les éléments du Tableau

$$(10)\quad \begin{Vmatrix} \Delta^\nu f & \Delta^{\nu-1}f & \dots & \Delta f & f \\ \Delta^\nu f(x_1+a_1,\dots) & \dots\dots & \dots & \Delta f(x_1+a_1,\dots) & f(x_1+a_1,\dots) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \Delta^\nu f[x_1+(\nu-1)a_1,\dots] & \dots\dots & \dots & \dots\dots & f[x_1+(\nu-1)a_1,\dots] \end{Vmatrix};$$

ces déterminants sont déjà périodiques en $x_2, x_3, \dots, x_p$. Si nous remplaçons x_1 par x_1+a_1, et si l'on tient compte de la relation (7), sur laquelle on fait les opérations $\Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^\nu$, on voit que tous les déterminants considérés se reproduisent multipliés par $(-1)^{\nu-1}\mu_0$, de sorte que leurs rapports restent invariables [1]; ce qui établit la complète périodicité des coefficients $P'_1, \dots, P'_\nu$. Ces coefficients sont d'ailleurs uniformes si f est uniforme. Les fonctions $f(x_1, \dots, x_p)$, $f(x_1+a_1, \dots)$, $f[x_1+(\nu-1)a_1, \dots]$ étant ν intégrales indépendantes de (8), toute intégrale de cette même équation se met sous la forme

$$\varphi = \lambda_0 f(x_1, \dots, x_p) + \lambda_1 f(x_1+a_1, \dots) + \dots + \lambda_{\nu-1} f[x_1+(\nu-1)a_1, \dots]$$

---

[1] On peut toujours supposer $\mu_0 \neq 0$ sinon on poserait $f_1 = f(x_1+a_1, \dots)$ et l'on raisonnerait sur la fonction f_1 qui serait d'ordre $\nu-1$.

avec

$$\Delta\lambda_0 = \Delta\lambda_1 = \ldots = \Delta\lambda_{\nu-1} = 0$$

et appartient, par conséquent, à l'équation (6) elle-même.

On voit donc que l'existence d'une intégrale d'ordre $\nu < n$ entraîne vis-à-vis de l'équation (6) une réductibilité particulière; de sorte que si, dans *le cas général*, il existait des intégrales d'ordre $\nu < n$, l'équation (8) admettrait à son tour des intégrales d'ordre inférieur à ν et, en continuant ainsi, on établirait l'existence d'intégrales d'ordre *un*.

Mais si l'équation (6) admet une intégrale d'ordre *un*, il existe une équation de degré *un*

$$\Delta f + \theta f = 0 \tag{11}$$

(θ périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_p$) dont toutes les intégrales appartiennent à (6). En effectuant sur (11) les opérations $\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{n-1} \ldots$, il vient

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta^2 f + \theta\,\Delta f + \Delta\theta f = 0, \\ \Delta^2 f + \theta\,\Delta^2 f + 2\,\Delta\theta\,\Delta f + \Delta^2\theta f = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta^n f + \theta\,\Delta^{n-1} f + \ldots + \Delta^{n-1}\theta f = 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

et, par élimination de $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots, \Delta^n f$ entre les équations (6), (11), (12),

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & P_1 & P_2 & P_3 & . & . & . & P_n \\ 1 & \theta & (n-1)\Delta\theta & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Delta^2\theta & . & . & . & \Delta^{n-1}\theta \\ 0 & 1 & \theta & (n-2)\Delta\theta & . & . & . & \Delta^{n-2}\theta \\ 0 & 0 & 1 & \theta & . & . & . & \Delta^{n-3}\theta \\ . & . & . & . & . & . & . & \ldots\ldots \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & \theta \end{array}\right| = 0. \tag{13}$$

C'est là une équation aux dérivées partielles en θ, qui devrait admettre au moins une intégrale uniforme périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et rien n'indique, *a priori*, qu'il en soit ainsi lorsque $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des fonctions périodiques quelconques, à cette seule condition que l'équation (6) possède n intégrales indépendantes uniformes.

Cette méthode ne démontre pas davantage que l'équation (13) ne pos-

sède pas d'intégrales périodiques, car l'existence de telles intégrales pourrait tenir à la forme toute particulière de cette équation. C'est précisément ce qui arrive dans le cas des équations différentielles linéaires ordinaires, à coefficients périodiques de même période, pour lesquelles on pourrait suivre une marche analogue.

Il convient de remarquer que, s'il existe une intégrale de l'équation (6) périodique en $x_2, x_3, \ldots, x_p$, d'ordre *un* par rapport à x_1, il existe des intégrales périodiques par rapport aux mêmes variables et pour lesquelles on a

$$f(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_p) = \varepsilon f(x_1, x_2, \ldots, x_p), \tag{14}$$

ε *désignant une constante*. On peut, en effet, trouver une équation

$$\Delta f + \theta f = 0,$$

où θ désigne une fonction entièrement périodique, dont toutes les intégrales appartiennent à l'équation (6). Or, une telle équation, qui s'intègre aisément, admet, en général [1], une intégrale de la forme

$$f = e^{ra_1} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

r étant une constante, Φ une fonction périodique en $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On a d'ailleurs

$$r = \frac{1}{a_1 \ldots a_p} \int_0^{a_1} \cdots \int_0^{a_p} \theta(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p;$$

la même intégrale appartient à l'équation (6) et l'on a

$$\varepsilon = e^{ra_1}.$$

Le problème revient donc à chercher s'il existe des intégrales f satisfaisant pour des valeurs convenables de ε à l'identité (14), ce qui permet d'envisager la question d'une façon un peu différente.

Partons d'un système de n intégrales indépendantes, périodiques en $x_2, x_3, \ldots, x_p$, et pour plus de simplicité choisissons un système de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad f(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_p), \quad \ldots, \quad f[x_1 + (n-1)a_1, x_2, \ldots, x_p],$$

[1] Les cas d'exception tiennent à des circonstances particulières relatives à la nature des périodes de la fonction θ; circonstances que nous avons signalées pages 55 à 62.

f désignant une intégrale d'ordre n. On peut écrire

$$\begin{aligned} &f(x_1 + na_1, \ldots) \\ &\quad = \mu_0 f(x_1, \ldots) + \mu_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \mu_{n-1} f[x_1 + (n-1)a_1, \ldots], \end{aligned}$$

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ étant fonctions périodiques des seules variables

$$u_2 = x_1 - x_2, \qquad \ldots, \qquad u_p = x_1 - x_p.$$

Soit

$$F = \lambda_0 f(x_1, \ldots) + \lambda_1 f(x_1 + a_1, \ldots) + \ldots + \lambda_{n-1} f[x_1 + (n-1)a_1, \ldots]$$

une intégrale quelconque périodique en $x_2, \ldots, x_p$ ($\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des fonctions périodiques de $u_2, u_3, \ldots, u_p$). Nous poserons,

$$\lambda^{(k)} = \lambda(u_2 + ka_1, u_3 + ka_1, \ldots, u_p + ka_1),$$

le même symbole s'appliquant aux coefficients μ. En exprimant que les intégrales $F(x_1 + a_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $\varepsilon F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sont identiques, il viendra

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \quad \lambda_{n-1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_0, \\ \lambda_0^{(1)} + \mu_1 \quad \lambda_{n-1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_1, \\ \lambda_1^{(1)} + \mu_2 \quad \lambda_{n-1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{n-2}^{(1)} + \mu_{n-1} \lambda_{n-1}^{(1)} = \varepsilon\lambda_{n-1}, \end{array} \right.$$

et l'élimination de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ donne alors

$$(16) \quad \mu_0^{(n-1)} \lambda_{n-1}^{(n)} + \varepsilon\mu_1^{(n-2)} \lambda_{n-1}^{(n-1)} + \varepsilon^2 \mu_2^{(n-3)} \lambda_{n-1}^{(n-2)} + \ldots + \varepsilon^{n-1} \mu_{n-1} \lambda_{n-1}^{(1)} - \varepsilon^n \lambda_{n-1} = 0.$$

C'est là une relation algébrique en ε et fonctionnelle par rapport à l'inconnue λ_{n-1}. On peut, d'ailleurs, former une équation fonctionnelle qui ne dépende pas de ε. Posons

$$\theta_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{n-1}}, \qquad \theta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}, \qquad \ldots, \qquad \theta_{n-2} = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}};$$

les équations (15) peuvent s'écrire, en les divisant membre à membre par

la première,

$$(17)\qquad \begin{cases} \theta_0^1 + \mu_1 = \dfrac{\theta_1}{\theta_0}\mu_0, \\ \theta_1^{(1)} + \mu_2 = \dfrac{\theta_2}{\theta_0}\mu_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \theta_{n-2}^{(1)} + \mu_{n-1} = \dfrac{1}{\theta_0}\mu_0. \end{cases}$$

L'élimination de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}$ fournit alors l'équation fonctionnelle

$$(18)\qquad \mu_1^{(n-2)} + \mu_2^{(n-3)}\frac{\mu_0^{(n-2)}}{\theta_0^{(n-2)}} + \mu_3^{(n-4)}\frac{\mu_0^{(n-2)}\mu_0^{(n-3)}}{\theta_0^{(n-2)}\theta_0^{(n-3)}} + \ldots + \mu_{n-1}\frac{\mu_0^{(n-2)}\ldots\mu_0^{(1)}}{\theta_0^{(n-2)}\ldots\theta_0^{(1)}}$$
$$= \frac{\mu_0^{(n-2)}\ldots\mu_0^{(1)}\mu_0}{\theta_0^{(n-2)}\ldots\theta_0^{(1)}\theta_0}$$

par rapport à la seule fonction inconnue θ_0.

La question se ramène donc à celle-ci : *l'équation fonctionnelle* (18) *admet-elle des solutions* θ_0 *périodiques en* $u_2, u_3, \ldots, u_n$. — L'existence de ces solutions est une condition nécessaire et suffisante, car si l'on en connaît une, θ_0, les équations (17) permettent de déterminer $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}$. Si ensuite, l'on se donne *arbitrairement* λ_{n-1}, périodique en $u_2, \ldots, u_p$, les formules

$$\theta_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{n-1}}, \qquad \theta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}, \qquad \ldots, \qquad \theta_{n-2} = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}}$$

permettent de déterminer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$. Les équations (15) sont satisfaites en donnant à ε une valeur qui n'est plus une constante il est vrai, mais l'intégrale correspondante étant d'ordre *un*, on est alors assuré de l'existence d'une intégrale F pour laquelle le rapport

$$\frac{F(x_1 + a_1, \ldots)}{F(x_1, \ldots)}$$

est constant.

En d'autres termes, l'existence de solutions périodiques θ_0 de l'équation (18) entraîne l'existence d'une fonction λ_{n-1} et d'une constante ε permettant de vérifier la relation (16), et inversement.

Je n'ai pas réussi jusqu'ici à élucider la question relative à l'existence des solutions θ_0 de l'équation (18) dans le cas le plus général ; quant aux con-

stantes ε, il est probable qu'elles sont racines d'une équation algébrique de degré n à coefficients constants, indépendante du système d'intégrales qui sert à la former, et qui reste la même lorsque, au lieu de considérer les intégrales périodiques par rapport à $x_2, x_3, \ldots, x_p$, on considère celles qui sont périodiques par rapport à $(p-1)$ autres variables quelconques.

Ces problèmes ont une grande importance si l'on remarque qu'à toute intégrale d'ordre un *de l'équation* (6) *correspond une intégrale de l'équation* (1) *de la page* 232

$$R(x)\frac{d^n y}{dx^n} + R_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + R_n(x)y = 0,$$

qui se met sous la forme

$$e^{\varepsilon x} f(x),$$

$f(x)$ *étant une fonction quasi-périodique.*

Il est probable qu'il existe des systèmes d'intégrales fondamentales indépendantes, jouissant, vis-à-vis de la quasi-périodicité, de propriétés analogues à celles que l'on obtient en considérant les intégrales d'équations différentielles linéaires, à coefficients périodiques de même période.

APPLICATION AUX MOYENNES D'OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES.

Je terminerai par une application assez curieuse des théorèmes que nous avons établis sur les fonctions moyennes déduites d'une même fonction quasi-périodique (p. 207 à 224).

On sait que, dans les stations météorologiques, les observations sont groupées en séries dont on calcule les moyennes. Que signifient ces moyennes? Pour saisir exactement le sens de cette question, prenons un exemple précis.

L'observation fournit directement la pression barométrique en fonction du temps. Soit

$$H = f(x)$$

cette fonction; x est le temps compté en jours moyens à partir d'une certaine époque origine.

Or, imaginons qu'on fasse la moyenne des observations faites à minuit, par exemple : en appelant n le nombre d'observations, et supposant l'origine des temps choisie à minuit du jour origine, on forme la quantité

$$\frac{1}{n}\{f(0)+f(0+1)+f(0+2)+\ldots+f[0+(n-1)]\}.$$

Le calcul montre que si le nombre des observations devient suffisamment grand, s'étendant à plusieurs années par exemple, cette moyenne a une limite fixe. C'est la pression moyenne de minuit.

Si, au lieu des observations de minuit, on prend celles d'une heure quelconque de la journée, la même pour chaque jour, la moyenne tend encore vers une limite déterminée, différente de la première.

En d'autres termes la quantité

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+1)+\ldots+f[x+(n-1)]\}$$

a, quel que soit x, une limite pour n infini. Cette limite est une fonction continue de x périodique de période *un* qui s'appelle la *variation diurne moyenne* de la pression barométrique.

D'une façon générale, le calcul des moyennes montre que les fonctions météorologiques, telles que $f(x)$, jouissent de la propriété suivante : la quantité

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(x+h)+\ldots+f[x+(n-1)h]\}$$

a, quels que soient x et h, une limite lorsque n augmente indéfiniment et cette limite est une fonction continue de x. Quelle est la signification des fonctions ainsi obtenues? Que représentent-elles vis-à-vis de la fonction $f(x)$ elle-même? Les propriétés des fonctions quasi-périodiques semblent fournir une réponse à cette question.

En effet, l'existence de ces fonctions moyennes est un des caractères essentiels des fonctions quasi-périodiques uniformément continues. D'autre part, les phénomènes météorologiques semblent résulter nettement, à part les causes accidentelles, de causes périodiques en nombre fini, mais de périodes différentes. C'est ainsi que, pour la température et la pression

barométrique, les causes périodiques qui, en dehors des variations accidentelles, paraissent intervenir sont :

1° Une cause diurne de période $a = 1$;
2° Une cause lunaire de période $b = 29,5305\ldots$;
3° Une cause annuelle de période $c = 365,2422\ldots$,

auxquelles il faudrait joindre probablement une cause de période $d = 27,3$ correspondant à la durée de la rotation solaire, et une cause de période $e = 11,1 \times 365,24$ correspondant à la périodicité des taches solaires (¹).

Il peut exister, bien entendu, d'autres causes périodiques qui influent sur les phénomènes météorologiques ; c'est à l'observation et au calcul de décider jusqu'à quel point il en est ainsi, et si l'on peut, en dehors des variations accidentelles, représenter les observations par une fonction quasi-périodique uniformément continue attachée au champ des périodes a, b, c, d, e.

Nous faisons donc l'hypothèse que $f(x)$ est une fonction quasi-périodique, hypothèse que seuls les calculs basés sur les considérations qui vont suivre seront capables de justifier.

Les moyennes font tout d'abord disparaître ce que l'on pourrait appeler les fonctions accidentelles. Une fonction $\theta(x)$ sera accidentelle si, quels que soient x et h, la quantité

$$\frac{1}{n}\{\theta(x) + \theta(x+h) + \ldots + \theta[x + (n-1)h]\}$$

a pour limite o et si de plus les nombres

$$\theta(x), \quad \theta(x+h), \quad \ldots, \quad \theta[x + (n-1)h]$$

satisfont, quant à leur répartition autour de leur moyenne, aux lois de la probabilité (²).

Le théorème des moyennes permettra de reconnaître les nombres h

(¹) Ces périodes ne sont pas encore très exactement connues.

(²) Je ne discuterai pas les objections qu'une telle définition pourrait soulever ; elle est en effet suffisante pour la clarté des raisonnements qui suivent.

appartenant aux corps des périodes. Si la fonction de x

$$[f(x), h] = \lim \frac{1}{n}\{f(x) + f(x+h) + \ldots + f[x+(n-1)h]\}$$

n'est pas constante, le nombre h appartient aux corps des périodes, et l'on aura là un moyen pratique de vérifier que le corps des périodes est défini par a, b, c, d, e. Si h n'appartient pas [1] au corps des périodes on aura

$$[f(x), h] = A_0,$$

A_0 désignant la moyenne générale, ici la pression moyenne.

On peut supposer que $f(x)$ est développable en une série de fonctions périodiques à périodes deux à deux incommensurables, car, s'il en était autrement, on pourrait toujours représenter $f(x)$ avec une approximation supérieure à la précision des observations, par une fonction qui jouirait de cette propriété. On écrira donc, en réunissant dans un même terme les deux fonctions égales $S_\alpha(x)$, $S_{-\alpha}(x)$,

$$f(x) = A_0 + \sum S_\alpha(x), \tag{1}$$

les fonctions périodiques S_α ayant chacune une moyenne nulle. Nous savons que les périodes α sont les périodes primitives du corps réduit fondamental. Ici les périodes a, b, c, d, e peuvent être pratiquement regardées comme indépendantes, de sorte que les périodes α sont données par la formule

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b} + \frac{m_3}{c} + \frac{m_4}{d} + \frac{m_5}{e};$$

m_1, m_2, ..., m_5 désignant des entiers quelconques premiers entre eux.

D'autre part nous savons que

$$A_0 + S_\alpha(x) = \lim \frac{1}{n}\{f(x) + f(x+\alpha) + \ldots + f[x+(n-1)\alpha]\},$$

---

[1] Pratiquement on reconnaîtra que h est extérieur au corps défini par a, b, c, d, e lorsque dans la relation

$$\frac{n}{h} = \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b} + \ldots + \frac{m_5}{e}$$

l'un au moins des entiers m_1, ..., m_5 sera très grand.

relation qui fournit un moyen pratique de calculer chacune des variations $S_\alpha(x)$ et nous avons une interprétation de ces moyennes.

La constante A_0 est la moyenne générale. *La variation diurne* n'est autre que le terme du développement (1) correspondant aux entiers $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = \ldots = m_5 = 0$.

La variation lunaire désigne la fonction S_α du même développement correspondant aux entiers $m_2 = 1$, $m_1 = m_3 = \ldots = m_5 = 0$.

La variation annuelle correspond au système $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$, $m_4 = 0$, $m_5 = 0$, etc.

C'est au calcul de décider de l'importance relative de chacune des variations composant le développement (1). Les variations S_α tendent vers 0 lorsque un ou plusieurs des entiers m grandissent indéfiniment; c'est encore au calcul de déterminer les limites inférieures de ces entiers au-dessus desquelles les variations correspondantes deviennent négligeables.

L'importance relative des variations qui figurent dans le développement (1) présente un réel intérêt. Ainsi, en ce qui concerne les pressions barométriques, les variations diurne, lunaire et annuelle sont connues depuis longtemps, mais il y a d'autres variations qui ne sont nullement négligeables; nous avons là une méthode pratique pour les rechercher et les obtenir.

Il est clair que les mêmes considérations s'appliquent aux températures, aux phénomènes magnétiques, etc.

CONCLUSION.

On voit que, dans ce travail, notre but principal a été d'étudier les fonctions quasi-périodiques uniformément continues et d'en préparer la voie des applications. Les fonctions développables en séries uniformément convergentes, dont les termes sont des fonctions quasi-périodiques uniformément continues, possèdent la plupart de leurs propriétés et en constituent une extension naturelle; mais on ne peut songer à obtenir par cette voie les fonctions quasi-périodiques simplement continues dont la définition (qui comprend aussi celles des fonctions quasi-périodiques uniformément continues) est indépendante des développements en série et résulte d'un point de vue différent. Il resterait à examiner si ces dernières admettent, elles aussi, des développements en séries caractéristiques.

Le mode de définition que nous avons adopté pour la quasi-périodicité n'exclut pas la possibilité de l'appliquer aux fonctions discontinues, mais c'est là une étude qui, tout en présentant un réel intérêt, a beaucoup moins d'importance au point de vue des applications, par ce fait que les fonctions que l'on y rencontre sont habituellement continues.

L'indépendance, entre les périodes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qui joue un rôle capital dans cette théorie n'est, en quelque sorte, qu'une première approximation; certaines propriétés des fonctions quasi-périodiques dépendent en outre de la façon dont la quantité $\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{a_n}$ peut se rapprocher de o, et c'est surtout dans des problèmes d'intégration où figurent des fonctions quasi-périodiques qu'il devient parfois indispensable de connaître ce nouvel élément.

NOTE I.

Je vais établir ici le théorème que nous avons admis (p. 102).

Étant donné un Tableau rectangulaire de $n(n-p)$ nombres entiers

$$(1)\qquad \left\| \begin{matrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{matrix} \right\|,$$

si l'on désigne par Δ le plus grand commun diviseur des déterminants (¹) *d'ordre $(n-p)$ formés avec les nombres de ce Tableau, on peut trouver un second Tableau rectangulaire de np entiers*

$$(2)\qquad \left\| \begin{matrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \dots & \mu_n^p \end{matrix} \right\|$$

de façon que le déterminant total

$$\left| \begin{matrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \dots & \mu_n^p \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{matrix} \right|$$

soit égal à Δ.

Nous allons montrer pour cela qu'étant donné le Tableau (1) on peut lui adjoindre une ligne $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ de façon que dans le nouveau Tableau

$$\left\| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \dots & s_n^{n-p} \end{matrix} \right\|$$

(¹) On néglige, bien entendu, ceux de ces déterminants qui sont nuls.

les déterminants d'ordre $(n-p+1)$ aient encore comme plus grand commun diviseur Δ.

En effet, les équations

$$\begin{aligned} s_1^1 x_1 + s_2^1 x_2 + \ldots + s_n^1 x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ s_1^{n-p} x_1 + s_2^{n-p} x_2 + \ldots + s_n^{n-p} x_n &= 0 \end{aligned}$$

ont toujours des solutions entières non nulles. Soit $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ une de ces solutions; on peut supposer que $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sont des *entiers premiers entre eux*. Or, d'après un théorème connu, on peut déterminer les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de façon que l'on ait

$$\mu_1 x_1^0 + \mu_2 x_2^0 + \ldots + \mu_n x_n^0 = 1.$$

Les entiers $\mu_1, \ldots, \mu_n$ étant ainsi déterminés, on voit que les équations

$$\begin{aligned} \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n &= 1, \\ s_1^1 x_1 + \ldots\ldots\ldots + s_n^1 x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ s_1^{n-p} x_1 + \ldots\ldots\ldots + s_n^{n-p} x_n &= 0 \end{aligned}$$

ont des solutions entières puisqu'elles ont en particulier la solution x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Or, d'après un théorème de M. Méray, que nous avons déjà énoncé page 91, il faut que les déterminants d'ordre $(n-p+1)$ formés avec les éléments du Tableau

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n \\ s_1^1 & s_2^1 & \ldots & s_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{n-p} & \ldots & \ldots & s_n^{n-p} \end{matrix} \right\|$$

aient pour plus grand commun diviseur un nombre d, divisant tous les déterminants d'ordre $(n-p+1)$ du Tableau

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n & 1 \\ s_1^1 & s_2^1 & \ldots & s_n^1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{n-p} & s_2^{n-p} & \ldots & s_n^{n-p} & 0 \end{matrix} \right\|$$

En prenant dans (4) les déterminants qui contiennent la dernière colonne, on voit que d doit diviser Δ, mais d'après la façon dont est composé le Tableau (3), d est nécessairement un multiple de Δ; par conséquent $d = \Delta$; ce qui établit la proposition. En continuant de proche en proche on obtient le théorème à démontrer.

Nous avons fait usage de ce théorème, en diverses circonstances, et, en particulier, lorsque $\Delta = \pm 1$.

Je ferai encore cette remarque que, les entiers μ_i^j du Tableau (2) étant choisis à la façon indiquée, les équations

$$\begin{aligned}
&\mu_1^1 \quad x_1 + \ldots + \mu_n^1 \quad x_n = n_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_1^p \quad x_1 + \ldots + \mu_n^p \quad x_n = n_p,\\
&s_1^1 \quad x_1 + \ldots + s_n^1 \quad x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&s_1^{n-p} x_1 + \ldots + s_n^{n-p} x_n = 0
\end{aligned}$$

ont, *quelles que soient les valeurs entières attribuées à* $n_1, n_2, \ldots, n_p$, des solutions entières en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous nous sommes servi plusieurs fois de cette propriété.

NOTE II

Je démontrerai, dans cette Note, le théorème sur lequel je me suis appuyé (p. 171), dans l'étude des développements en séries trigonométriques des fonctions de plusieurs variables, à savoir que si la fonction continue $F(x, y)$ périodique en x, y de périodes a, b satisfait aux conditions de Dirichlet (p. 167), l'intégrale

$$(1)\quad \frac{1}{b}\int_0^b F(\alpha, \beta)\frac{\sin(2n+1)\pi\dfrac{\beta-y}{b}}{\sin\pi\dfrac{\beta-y}{b}}\,d\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\frac{y}{b}}^{\pi-\pi\frac{y}{b}} F\left(\alpha, y+\frac{b\gamma}{\pi}\right)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma$$

tend uniformément vers $F(\alpha, y)$, lorsque l'entier positif n croît indéfiniment.

Lemme. — *Soient h un nombre compris entre* 0 *et* π, $\varphi(x)$ *une fonction finie de module inférieur à* M, *satisfaisant entre* 0 *et h aux conditions de Dirichlet; c'est-à-dire que dans l'intervalle* $(0, h)$ *elle est décomposable en un nombre fini μ d'intervalles, dans chacun desquels la fonction $\varphi(x)$ est continue et varie toujours dans le même sens. Il existe une constante absolue ρ, indépendante de h et de la fonction φ, telle que l'on puisse écrire, quel que soit l'entier positif n $(n \neq 0)$,*

$$(2)\qquad \left|\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx\right| < \rho\mu M.$$

Considérons d'abord le cas particulier où $h \leqq \frac{\pi}{2}$, *et où $\varphi(x)$ est une fonction positive ne croissant jamais entre* 0 *et h.* Posons

$$J = \int_0^h \varphi(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx \qquad (k = 2n+1).$$

Il suffit dans ce cas, pour établir le théorème, de reprendre la démons-

tration [1] par laquelle on montre que $\lim_{n=\infty} J = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$.

Soit d'abord l'intégrale auxiliaire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx,$$

qui a pour valeur $\frac{\pi}{2}$.

Pour obtenir une limite supérieure de l'intégrale J, partageons le champ d'intégration en intervalles

$$0,\quad \frac{\pi}{k},\quad \frac{2\pi}{k},\quad \ldots,\quad \frac{m\pi}{k},\quad \ldots,\quad \frac{r\pi}{k},\quad h,$$

r désignant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{2}$ contenu dans h. On a ainsi la somme d'intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{r\pi}{k}}^{h} \frac{\sin kx}{\sin x}\varphi(x)\,dx.$$

Les termes de cette somme sont alternativement positifs et négatifs, et le premier est manifestement positif. On peut écrire en effet

$$\int_{m+1\frac{\pi}{k}}^{(m+2)\frac{\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\varphi(x)\,dx = -\int_{\frac{m\pi}{k}}^{(m+1)\frac{\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{k}\right)}\varphi\left(x+\frac{\pi}{k}\right)dx,$$

ce qui montre de plus, puisque le facteur $\frac{\varphi\left(x+\frac{\pi}{k}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{k}\right)}$ est moindre que $\frac{\varphi(x)}{\sin x}$, que les intégrales de la suite précédente décroissent en valeur absolue.

On écrira donc

$$J = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots,$$

---

(1) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, § 3, p. 217.

et ceci montre déjà que l'intégrale J est positive :

$$(3) \qquad 0 < J < u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p}.$$

Effectuons le même partage pour l'intégrale auxiliaire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx}{\sin x}\, dx \qquad (k = 2n+1);$$

on aura

$$\frac{\pi}{2} = \rho_0 - \rho_1 + \rho_2 - \ldots,$$

en posant

$$\rho_0 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\, dx, \quad . \quad \rho_1 = -\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\, dx, \qquad \ldots.$$

On conclut de là

$$(4) \qquad \rho_0 - \rho_1 + \ldots - \rho_{2p+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Si dans le terme général

$$u_m = (-1)^m \int_{\frac{m\pi}{k}}^{(m+1)\frac{\pi}{k}} \frac{\sin kx}{\sin x}\, \varphi(x)\, dx$$

on remplace φ par sa limite supérieure $\varphi\left(\frac{m\pi}{k}\right)$, puis par sa limite inférieure $\varphi\left[\frac{(m+1)\pi}{k}\right]$, on aura

$$\varphi\left(\frac{m\pi}{k}\right)\rho_m > u_m > \varphi\left[\frac{(m+1)\pi}{k}\right]\rho_m.$$

Dans le second membre de l'inégalité (3) remplaçons les termes d'indice pair par des nombres plus grands, les termes d'indice impair par des nombres plus petits; l'inégalité subsiste et devient

$$J < \rho_0\,\varphi(0) - \rho_1\,\varphi\left(\frac{2\pi}{k}\right) + \ldots - \rho_{2m-1}\,\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right) + \rho_{2m}\,\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

ou encore

$$J < \rho_0\,\varphi(0) - (\rho_1 - \rho_2)\,\varphi\left(\frac{2\pi}{k}\right) - \ldots - (\rho_{2m-1} - \rho_{2m})\,\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$$

et, à plus forte raison,

$$J < \rho_0 \varphi(0).$$

Or, il est facile d'obtenir une limite supérieure pour ρ_0; l'inégalité (4), où l'on fait $\rho = 0$, donne immédiatement

$$\rho_0 < \frac{\pi}{2} + \rho_1;$$

d'autre part, l'on a manifestement

$$\rho_1 < -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{k}} \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \sin kx\, dx,$$

ou bien

$$\rho_1 < \frac{\frac{\pi}{k}}{\sin\frac{\pi}{k}} \frac{2}{\pi};$$

comme $k \geqq 3$, on a certainement

$$\rho_1 < \frac{\pi}{2}$$

et, finalement,

$$\rho_0 < \pi.$$

En définitive on a, dans ce cas,

$$0 < J < \pi \varphi(0),$$

quel que soit $h < \frac{\pi}{2}$ et quel que soit l'entier n.

Supposons maintenant que, au lieu d'être décroissante ou constante, la fonction $\varphi(x)$, tout en restant positive, ne décroisse jamais dans l'intervalle $0, h$.

Considérons alors la fonction

$$\psi(x) = \varphi(h) - \varphi(x);$$

on peut lui appliquer le théorème précédent, ce qui donne

$$0 < \int_0^h [\varphi(h) - \varphi(x)] \frac{\sin kx}{\sin x} dx < \pi[\varphi(h) - \varphi(0)]$$

ou encore

$$\varphi(h)\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,dx - \pi[\varphi(h)-\varphi(0)] < \int_0^h \varphi(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx < \varphi(h)\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,dx,$$

et, à plus forte raison, puisque l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,dx$ est positive,

$$-\pi[\varphi(h)-\varphi(0)] < \int_0^h \varphi(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx < \varphi(h)\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,dx.$$

Ces inégalités prouvent que, en valeur absolue, l'intégrale $J = \int_0^h \varphi(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx$ est inférieure au plus grand des nombres

$$\pi[\varphi(h)-\varphi(0)], \quad \varphi(h)\int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x}\,dx$$

et, par suite, à $\pi\varphi(h)$,

$$|J| < \pi\varphi(h).$$

On peut alors appliquer le théorème aux fonctions négatives, à condition que, dans l'intervalle $(0, h)$ elles gardent le même signe et varient dans le même sens; si M est un nombre supérieur à la valeur absolue de $\varphi(x)$, on aura, dans tous ces cas,

$$|J| < \pi M.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction qui, dans l'intervalle (g, h), est continue, garde un signe constant et varie dans le même sens; considérons l'intégrale

$$\int_g^h \varphi(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx \qquad (k = 2n+1).$$

Si l'on appelle $\varphi_1(x)$ une fonction constante égale à $\varphi(g)$ pour $0 \leqq x \leqq g$ et coïncidant avec $\varphi(x)$ dans l'intervalle (g, h), on aura

$$\left|\int_0^h \varphi_1(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx\right| < \pi\varphi(g) < \pi M,$$

$$\left|\int_0^g \varphi_1(x)\frac{\sin kx}{\sin x}\,dx\right| < \pi\varphi(g) < \pi M;$$

par suite, en faisant la différence,

$$\left| \int_g^h \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx \right| < 2\pi M.$$

Soit enfin $\varphi(x)$ une fonction continue qui dans l'intervalle $(0, h)$ peut changer de signe, mais varie toujours dans le même sens; si l'on appelle g la valeur de x qui annule $\varphi(x)$, on peut écrire

$$J = \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx = \int_0^g \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx + \int_g^h \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx;$$

par suite

$$|J| < 3\pi M.$$

De même, soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $\left(g, h \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, variant toujours dans le même sens, mais pouvant être positive ou négative, on aura par le même procédé

$$\left| \int_g^h \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx \right| < 4\pi M \qquad [|\varphi(x)| < M].$$

Ceci posé, supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction bornée, satisfaisant entre 0 et h aux conditions de Dirichlet, et soit μ le nombre d'intervalles, dans chacun desquels la fonction varie dans le même sens; on aura d'après les théorèmes précédents

$$\left| \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin kx}{\sin x} dx \right| < 4\pi\mu M.$$

On a supposé h compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; supposons h compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on aura

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx}{\sin x} \varphi(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^h \frac{\sin kx}{\sin x} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx}{\sin x} \varphi(x)\, dx + \int_{\pi-h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx}{\sin x} \varphi(\pi - x)\, dx,$$

et par suite encore, en appelant μ le nombre d'intervalles dans lequel $\varphi(x)$ varie dans le même sens,

$$|J| < 4\pi\mu M.$$

D'une façon générale, *si g et h désignent deux nombres quelconques compris entre $-\pi$ et $+\pi$ ou égaux à ces limites, on a en appelant μ le nombre d'intervalles (compris dans l'intervalle g, h) où $\varphi(x)$ varie dans le même sens*

$$\left|\int_g^h \varphi(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right| < 4\pi\mu M \qquad [|\varphi(x)| < M],$$

et cela quel que soit l'entier positif n.

Ceci posé, revenons à l'intégrale

$$J(\alpha, y, n) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi\frac{y}{b}}^{\pi-\pi\frac{y}{b}} F\left(\alpha, y + \frac{b\gamma}{\pi}\right)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma,$$

y pouvant toujours être choisi entre o et b puisque F est périodique en y.

Tout d'abord on sait [1] que, si l'on donne à α une valeur fixe, l'intégrale J considérée comme fonction de y tend uniformément vers $F(\alpha, y)$, c'est-à-dire qu'étant donné ε on peut trouver ν de façon que pour $n \geqq \nu$ on ait, quel que soit y,

$$|J(\alpha, y, n) - F(\alpha, y)| < \varepsilon;$$

mais l'entier ν dépend de α. Si l'on pouvait montrer que ν a un maximum lorsque α varie, la proposition serait établie. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; donnons-nous une suite d'entiers $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ croissant indéfiniment, et considérons des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ pour lesquelles le plus petit des entiers ν précédemment définis est respectivement supérieur à $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ ont au moins une valeur limite α comprise entre o et a ou égale à l'un de ces nombres. On en conclut qu'il existe des valeurs α' aussi voisines qu'on le veut de α, et des entiers n aussi grands qu'on le veut pour lesquels on a pour certaines

---

[1] Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 236, § 13.

valeurs y'

$$(3) \qquad |J(\alpha', y', n) - F(\alpha', y')| > \varepsilon.$$

D'autre part, l'intégrale $J(\alpha, y, n)$, où α est fixe, tendant uniformément vers $F(\alpha, y)$, on en conclut l'existence d'un entier ν tel que pour $n \geqq \nu$ on ait, quel que soit y',

$$(4) \qquad |J(\alpha, y', n) - F(\alpha, y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considérons maintenant la différence $J(\alpha', y', n) - J(\alpha, y', n)$, on a

$$J(\alpha', y', n) - J(\alpha, y', n)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi\frac{\gamma}{b}}^{\pi-\pi\frac{\gamma}{b}} \left[F\left(\alpha', y' + \frac{b\gamma}{\pi}\right) - F\left(\alpha, y' + \frac{b\gamma}{\pi}\right)\right] \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\, d\gamma.$$

D'après le lemme établi plus haut, remarquant que la fonction de γ, $F\left(\alpha', y' + \frac{b\gamma}{\pi}\right) - F\left(\alpha, y' + \frac{b\gamma}{\pi}\right)$, possède par hypothèse un nombre de maxima et de minima inférieur à μ, on en conclut, en désignant par M le maximum de cette fonction,

$$|J(\alpha', y', n) - J(\alpha, y', n)| < 4\pi\mu M.$$

Or si α' est suffisamment voisin de α, M sera aussi petit qu'on le veut, de sorte que l'on pourra écrire

$$(5) \qquad |J(\alpha', y', n) - J(\alpha, y', n)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

d'où, par la comparaison des inégalités (4) et (5),

$$|J(\alpha', y', n) - F(\alpha', y')| < \frac{2\varepsilon}{3} + |F(\alpha, y') - F(\alpha', y')| :$$

mais α' peut toujours être choisi assez voisin de α pour que, quel que soit y',

$$|F(\alpha, y') - F(\alpha', y')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

de sorte que, quels que soient y' et l'entier $n \geqq \nu$, on aura pour toutes les valeurs de α' assez voisines de α,

$$|J(\alpha', y', n) - F(\alpha', y')| < \varepsilon;$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (3); le théorème est démontré.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 avril 1904.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Paul APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 avril 1904.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie des tourbillons.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 avril 1904.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Paul APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 avril 1904.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Introduction 1

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES.

Généralités sur les fonctions de variables réelles 7
Fonctions périodiques d'une variable 12
Fonctions périodiques de plusieurs variables 15
- Fonctions irréductibles 17
- Transformation des périodes par substitution linéaire. Fonctions réductibles 22
- Périodes propres distinctes 25
- Constitution de l'ensemble des périodes d'une fonction irréductible 27
- Systèmes minimum 29
- Constitution de l'ensemble des périodes d'une fonction réductible 32

Étude d'une classe particulière de fonctions périodiques 37
- Fonctions de fonctions périodiques 41
- Fonctions entièrement périodiques à périodes indépendantes 45

Quelques problèmes sur les fonctions entièrement périodiques à périodes indépendantes 49
- Intégrales d'une fonction périodique à périodes indépendantes 54
- Périodes des fonctions de variables imaginaires 63

Fonctions périodiques définies sur un champ dense 67

DEUXIÈME PARTIE.

CORPS ET CHAMPS DE PÉRIODES.

Corps de périodes 70
- Définitions 70
- Ordre d'un corps de périodes défini par n périodes quelconques 71
- Corps commun à deux corps donnés 75

Pages.

Corps réduit. Bases d'un corps réduit. Périodes primitives 77
Champs de périodes 83
Champ total défini par un système de périodes indépendantes 85
Champ total défini par un système de périodes dépendantes 89

Champs équivalents, champs multiples d'un champ donné 96
Champs équivalents de périodes indépendantes 97
Champs équivalents à un champ donné de périodes dépendantes 101
Champs multiples d'un champ donné 108
Champ résultant. Multiple commun à plusieurs champs 111

Remarque générale 112

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES CONTINUES.

Fonctions quasi-périodiques attachées a un même champ de périodes 113
Définitions 113
Fonctions quasi-périodiques définies sur un champ de périodes dépendantes 128

Champs absolus attachés a une même fonction quasi-périodique 130
Champs absolus attachés simultanément a plusieurs fonctions quasi-périodiques 142
Dérivée et intégrale d'une fonction quasi-périodique continue 143
Dérivée 143
Intégrale 147

Fonctions de fonctions périodiques 150

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES UNIFORMÉMENT CONTINUES.

Développements en séries de Fourier des fonctions périodiques de plusieurs variables 164
Développements en séries des fonctions quasi-périodiques uniformément continues. 190
Fonctions S. Développements en séries de fonctions périodiques 201
Fonctions S 201
Développements en séries de fonctions périodiques 205

Fonctions moyennes déduites d'une même fonction quasi-périodique 207
Théorème fondamental 212
Application aux fonctions quasi-périodiques 215
Application aux développements en séries de fonctions périodiques 220

Pages.

Représentation approchée des fonctions quasi-périodiques, par une somme finie de fonctions périodiques à périodes incommensurables 223

FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES D'ORDRE INFINI 224
SOMMES FINIES DE FONCTIONS PÉRIODIQUES 225

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 228
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS QUASI-PÉRIODIQUES 232

Sur un système d'équations fonctionnelles 246
Quelques recherches sur les propriétés générales de certaines intégrales 253

APPLICATION AUX MOYENNES D'OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES 259

CONCLUSION 264

NOTE I 265

NOTE II 268

35047 IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
35047 Quai des Grands-Augustins, 55.